

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Vanessa Pitirini Guarienti

**COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA EM SISTEMAS
RELATIVÍSTICOS**

Florianópolis (SC)

2016

Vanessa Pitirini Guarienti

**COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA EM SISTEMAS
RELATIVÍSTICOS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física para a obtenção do
Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Inacio Duz-
zioni

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis (SC)

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor através do
Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Guarienti, Vanessa Pitirini
Computação Quântica Adiabática em Sistemas Relativísticos
/ Vanessa Pitirini Guarienti ; orientador, Eduardo Inacio
Duzzioni - Florianópolis, SC, 2016.
122 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Computação Quântica. 3. Computação Quântica
Adiabática. 4. Algoritmo de Deutsch. 5. Relatividade
Especial. I. Duzzioni, Eduardo Inacio . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

Vanessa Pitirini Guarienti

COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA EM SISTEMAS RELATIVÍSTICOS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis (SC), 16 de Novembro 2016.

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Universidade Federal de Santa Catarina
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar - Membro Externo
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Eduardo Inacio Duzzioni
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador

Prof. Dr. Eduardo Cerutti Mattei
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Kahio Tibério Mazon
Universidade Federal de Santa Catarina

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Como disse Anne Frank, adolescente vítima do Holocausto, “os mortos recebem mais flores que os vivos, porque o remorso é mais forte do que a gratidão”. Pensando nisto, gostaria de expressar neste pequeno texto a gratidão que sinto por algumas pessoas especiais em minha vida.

- Agradeço do fundo do meu coração aos meus amados pais, Vânia e Evaldo, por tudo que me proporcionaram desde o meu nascimento. Somente vocês sabem o quanto batalhei para chegar até o dia de hoje. Em especial, agradeço por todos os momentos que vivemos juntos, bons e difíceis, pois sem eles não me tornaria a pessoa que sou hoje. Agradeço a todos os ensinamentos, a toda paciência nos meus momentos de “rebeldia”, a toda a dedicação e principalmente por apoiarem minhas escolhas e me ajudarem financeiramente até aqui.

- Agradeço ao meu irmão, Bruno, por ser meu amigo e me ajudar nos momentos difíceis. Pela paciência com essa irmã murrinha que tanto te quer bem. Agradeço por estar sempre perto quando precisei, em especial por carregar os meus pertences “pra cima e pra baixo” nas minhas mudanças. Pelos passeios, pelos almoços de domingo na mãe ou no pai, pelas conversas tomando chimarrão, pelas corridinhas esporádicas, pelas abobacides... enfim, todos os momentos bons que passamos juntos.

- Agradeço a todos os meus familiares, em especial aos meus nonos Gentil e Vilma (falecidos), vó Jalma, tio Beto, tio Tiago, tio Francisco, tio Luis, tia Sara e Nandinha. Vocês possuem um lugar especial em meu coração.

- Agradeço ao meu lindo Murilo, por todos os pequenos e grandes momentos que vivenciamos juntos, desde um carro quebrado na BR 101 com direito a passeio de guincho até as noites acompanhadas de um bom vinho e de boa música. Agradeço pela cumplicidade, parceria e amizade que temos, pelo carinho, pelas risadas que tu me arranca com esse teu jeito de ser, pelas tardes de chimarrão, pela sintonia, por aguentar as minhas TPM's (que são de enlouquecer qualquer um, hehehe), por ser paciente e leal comigo. Agradeço especialmente por ter colocado os teus familiares em minha vida,

Vó Joana, D. Isabel, S. Milton, Ivis, Sara e Lala, os quais me acolhem, me proporcionam momentos inesquecíveis e me ajudam a ser uma pessoa melhor a cada dia.

- Agradeço aos meus amigos, em especial Débora, Edu, Gentil e Luciano. Obrigada pela parceria e por todas as conversas, quase sempre acompanhadas de bons risos (com ou sem cerveja). Vocês são muito especiais para mim e serei eternamente grata por tudo o que me ajudaram até aqui. Contem sempre comigo!

- Por fim, agradeço à todos os professores do Departamento de Física da UFSC, por contribuírem com minha formação, em especial à professora Françoise T. Reis que me orientou na iniciação científica e me abriu a mente para muitas coisas e ao professor Eduardo I. Duzzioni que me orientou neste trabalho de mestrado e me proporcionou um conhecimento ímpar na área da computação quântica.

Os verdadeiros valentes vencem a sua imaginação
e fazem o que devem fazer.

Charles Bukowski

RESUMO

Este trabalho de mestrado tem como objetivo implementar o algoritmo de Deutsch adiabático levando em conta efeitos da relatividade restrita. Utilizamos como modelo o problema não-relativístico de Deutsch e o modificamos através da substituição da equação de Schrödinger pela de Dirac. Encontramos a condição adiabática em termos do tempo total de computação para a validade do algoritmo implementado e a comparamos com seu limite não-relativístico. Esta comparação levou à conclusão de que o valor do tempo de computação para o caso não-relativístico capaz de garantir a adiabaticidade do sistema é 10^{11} vezes maior do que no caso relativístico. Embora o nosso algoritmo seja probabilístico, mostramos que levar em conta os efeitos relativísticos, intrínsecos das partículas elementares, pode acarretar um ganho substancial no tempo computacional. Por fim, resolvemos a equação de Dirac para o nosso sistema analiticamente e numericamente e verificamos a validade da condição adiabática, mostrando que neste regime, como esperado, não há transição entre os estados.

Palavras-chave: Computação Quântica, Computação Quântica Adiabática, Computação Quântica Adiabática Relativística, Algoritmo de Deutsch, Equação de Dirac.

ABSTRACT

This work aims to implement the adiabatic Deutsch's algorithm taking into account the effects of special relativity. We used the non-relativistic Deutsch's problem as a model and modified through the replacement of the Schrödinger equation by the Dirac. We found the adiabatic condition in terms of the total time computing for the validity of the implemented algorithm and compared with its non-relativistic limit. This comparison lead us to conclude that the time computating for to ensure the adiabaticity of the system in the non-relativistic case is 10^{11} times larger than the relativistic case. Despite the probabilistic character, we showed that taking into account the relativistics effects in our algorithm, intrinsic of elementary particles, we have a substantial gain in the time computating. Finally, we solved the Dirac equation analytically and numerically and verify the validity of the adiabatic condition. In this regime, as expected, there is no transition between the states.

Keywords: Quantum Computing, Adiabatic Quantum Computing, Relativistic Adiabatic Quantum Computing, Deutsch's Algorithm, Dirac Equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Principais algoritmos quânticos e suas relações. Figura retirada da referência [3].	24
Figura 2	Computador quântico. Figura retirada da referência [15].	24
Figura 3	Movimento adiabático.	28
Figura 4	Evolução adiabática do n -ésimo autoestado instantâneo do hamiltoniano de t_0 a t_1	31
Figura 5	(a) Esboço de um espectro de energia com $gap\ g_{nk} = E_n - E_k \neq 0$ durante toda a evolução. Não há cruzamento dos níveis. (b) Esboço de um espectro de energia com cruzamento dos níveis. Figuras retiradas da referência [58].	32
Figura 6	Campo magnético descrevendo um cone com velocidade angular constante ω	38
Figura 7	Representação da atuação da porta lógica de Hadamard em um qubit.	44
Figura 8	Porta lógica quântica CNOT, onde $ A\rangle$ $\hat{I}_C^{1/2}$ o qubit de controle e $ B\rangle$ é o qubit alvo.	45
Figura 9	Representação circuital de um algoritmo quântico para n qubits.	45
Figura 10	Circuito quântico para o algoritmo de Deutsch.	49
Figura 11	Fluxograma indicando a implementação do algoritmo de Deutsch relativístico.	70
Figura 12	(a) Níveis energéticos E em um SQDN em função de um parâmetro externo dependente do tempo $\varepsilon(t)$. (b) Comportamento do parâmetro externo $\varepsilon(t)$. Figura retirada de [63].	89
Figura 13	Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{19}$ V/m.	106
Figura 14	Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para três valores distintos de campo elétrico. A medida que o campo diminui sua magnitude, a adiabaticidade do sistema prevalece.	107
Figura 15	Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{19}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.	109
Figura 16	Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{18}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.	109

Figura 17 Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{17}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.....	110
Figura 18 Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{16}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.....	110
Figura 19 Comportamento do coeficiente C_{0p} no regime adiabático.	111
Figura 20 Comportamento do coeficiente C_{1p} no regime adiabático.....	111
Figura 21 Probabilidade do elétron permanecer no autoestado $ \Psi_{Ad}(t)\rangle$ para diferentes valores de campo elétrico aplicado.....	112

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
Um pouco sobre algoritmos quânticos...	23
2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA	27
2.1 TEOREMA ADIABÁTICO	27
2.1.1 Condição sobre o hamiltoniano: caso não-degenerado	27
2.1.2 Condição sobre o hamiltoniano: caso degenerado	35
2.1.3 Evolução do estado do sistema	35
Fase Geométrica	36
2.1.4 Condição no Tempo Total de Evolução	37
2.1.5 Exemplo: elétron interagindo com o campo magnético dependente do tempo	38
2.2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA CIRCUITAL	42
2.3 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA	46
2.3.1 Algoritmo de Deutsch	47
2.3.1.1 Computação cuircuital	48
2.3.1.2 Computação quântica adiabática	49
3 MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA	55
3.1 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER	55
3.2 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	56
3.2.1 Densidade de probabilidade e energia negativas	57
3.3 EQUAÇÃO DE DIRAC	59
3.3.1 Solução da equação de Dirac para a partícula em repouso	61
3.4 EQUAÇÃO DE DIRAC EM (1+1) DIMENSÕES	63
3.4.1 Partícula Interagindo com o Campo Eletromagnético	64
Autoestados e autoenergias	65
4 RESULTADOS	67
4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DEUTSCH RELATIVÍSTICO	67
4.1.1 Interpolação do Hamiltoniano	73
4.1.2 Condição Adiabática	73
Comparação entre os três casos:	79
4.1.3 Limite não-relativístico	82
4.1.3.1 Transformação FW	82
Problemas	82
4.1.3.2 Limite não relativístico - algoritmo de Deutsch	85
4.1.4 Teoria de Landau-Zener-Stückelberg - Uma alternativa para o limite não-relativístico	88

4.1.5	Condição Adiabática para o Limite Não-Relativístico	93
4.2	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC EM (1+1) DIMENSÕES	98
4.2.1	Solução Analítica	101
4.2.2	Solução Numérica	107
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
	Referências Bibliográficas	115

1 INTRODUÇÃO

“O cálculo quântico de uma molécula de metano requer 10^{42} pontos em um reticulado. Supondo que em cada ponto realizemos somente 10 operações elementares, e que o cálculo seja realizado a uma temperatura extremamente baixa, $T = 3 \times 10^{-3}$ K, ainda assim teríamos que usar toda a energia produzida na Terra no último século.”

(R. P. Poplavskii - 1975 [1])

“(...) O mundo físico é quântico, e portanto, o problema apropriado é a simulação da física quântica. (...) a descrição quântica completa para um sistema com R partículas tem variáveis demais; ele não pode ser simulado por um computador normal com um número de elementos proporcional a R (...) mas pode ser simulado por um computador quântico. (...) poderia um sistema quântico ser probabilisticamente simulado por um computador clássico universal (probabilístico)? (...) Se o computador for do tipo clássico (...) a resposta é certamente, não!”

(Richard P. Feynman - 1982 [2])

Os trechos citados acima, indicam claramente que a ideia do computador quântico surgiu com a necessidade de simular sistemas quânticos. A razão pela qual um computador clássico não simularia estes tipos de sistemas é que a quantidade de números complexos necessários para descrever o problema quântico normalmente cresce *exponencialmente* com a dimensão do sistema, e não linearmente, como ocorre com sistemas clássicos. Segundo os autores M. A Nielsen e I. L. Chuang [3]:

“Armazenar um estado quântico com n componentes ocupa cerca de c^n bits da memória de um computador clássico, onde c é uma constante que depende dos detalhes do sistema simulado e da precisão almejada para a simulação. Em contrapartida, um computador quântico pode realizar a mesma simulação usando kn qubits, em que k também é uma constante que depende dos detalhes do sistema simulado.”

Um outro viés que evidenciou a relação entre a computação e a mecânica quântica apareceu com a lei de Moore. Esta lei, prevista por Gordon Moore em 1965 [4], diz que a densidade de dispositivos transistores nos circuitos integrados dos computadores e a capacidade computacional dobra a cada ano, levando à inevitável conclusão de que por volta de 2020 cada bit seria codificado em apenas um átomo. Por conta da redução do tamanho dos componen-

tes, os efeitos quânticos começam a interferir no funcionamento da tecnologia convencional utilizada na fabricação de computadores.

Apesar de termos a noção de que as operações lógicas em última instância são processos físicos (as informações são armazenadas, transmitidas e processadas sempre por um meio físico), durante muito tempo a computação clássica caracterizou-se como uma teoria matemática, puramente abstrata. Somente quando efeitos quânticos como interferência e emaranhamento se tornaram importantes, devido à miniaturização dos dispositivos ou à necessidade de simular sistemas quânticos, que a computação foi vista com um olhar mais físico.

No mesmo ano em que R. P. Feynman sugeriu os computadores quânticos, motivado pela ideia de que um sistema quântico seria simulado de maneira mais eficiente e natural em um computador quântico do que em um computador clássico, P. Benioff [5, 6] mostrou que uma máquina de Turing (máquina universal capaz de executar qualquer computação realizável por um computador clássico, independentemente de quão poderoso seja este computador) poderia ser simulada por operações unitárias reversíveis, que é um pré-requisito necessário para a computação quântica. Porém, a conexão fundamental entre as leis da física e o que é computável se solidificou com o trabalho de D. Deutsch em 1985 [7]. Neste artigo, Deutsch definiu um modelo computacional que reformulava a máquina de Turing, porém matinha seu poder de computação. Ele estabeleceu o seguinte princípio: *Qualquer sistema físico possível de ser realizado pode, perfeitamente, ser simulado por uma máquina universal que opera em meios finitos.*

Por sua teoria ser mais concreta e mais compatível com a ciência da computação tradicional do que outras propostas até então, o “computador” de Deutsch é considerado o primeiro modelo computacional da computação quântica. Pouco tempo depois, em 1988, Deutsch formulou o modelo de portas lógicas quânticas, em analogia com a computação clássica, possibilitando a construção de algoritmos quânticos [8]. Este novo modelo de computação é constituído por um circuito quântico contendo fios e portas lógicas quânticas que carregam e manipulam a informação de um lado para outro. Trabalham em série e em paralelo para executar uma determinada tarefa e operam em qubits (ou bits quânticos), explorando suas propriedades quânticas de superposição e emaranhamento. Este foi o primeiro passo para a realização de computadores quânticos.

UM POUCO SOBRE ALGORITMOS QUÂNTICOS...

Com a contribuição dos trabalhos de Deutsch, surgiu o primeiro algoritmo da história da computação quântica para um bit quântico, o qual hoje é conhecido como algoritmo de Deutsch. Basicamente, este algoritmo consiste em determinar se uma dada função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ é constante ou balanceada. A extensão deste algoritmo para o caso geral com n bits quânticos foi realizada anos mais tarde por Deutsch e Jozsa [9]. Apesar de apresentarem aplicações práticas pouco significativas, estes algoritmos apresentam grande relevância teórica, pois contém as sementes para outros mais sofisticados e aplicáveis experimentalmente. Além disso, são a demonstração concreta de que um computador quântico poderia fazer alguma coisa mais eficientemente do que um clássico e que essa economia de recursos poderia ser escalada para sistemas maiores.

Outros algoritmos de grande destaque na computação quântica são os que se baseiam na transformada quântica de Fourier, capazes de resolver problemas de fatoração com ganho exponencial de velocidade sobre os análogos clássicos conhecidos. O pioneiro neste tipo de algoritmo foi P. Shor [10], que demonstrou que os problemas de encontrar os fatores primos de um número inteiro e o “problema do logaritmo discreto” poderiam ser resolvidos eficientemente em um computador quântico.

Finalmente, uma outra classe de algoritmos surgiu com L. Grover [11]. São os chamados algoritmos de busca. Em seu trabalho, Grover mostrou que o problema de se realizar uma busca em uma lista desordenada poderia ser resolvido mais rapidamente em um computador quântico, obtendo um ganho quadrático de tempo sobre os equivalentes clássicos.

A figura 1, retirada da referência [3], ilustra o que o autor chama de “estado da arte” sobre algoritmos quânticos até o início dos anos 2000. No centro do diagrama estão as transformadas quântica de Fourier e o algoritmo quântico de busca ramificando-se em suas principais aplicações.

Apesar dos algoritmos quânticos circuitais serem promissores, existem poucos que funcionam de maneira mais eficiente do que seus equivalentes clássicos. Uma alternativa surgiu com trabalho de E. Farhi et al. [12], com a proposta da computação quântica adiabática. Este novo tipo de computação substitui a sequência de operações unitárias aplicadas aos qubits (de maneira discreta) por um hamiltoniano que depende continuamente do tempo. Além disso, considera que o estado que contém a resposta para o problema seja o estado fundamental do hamiltoniano no tempo final da evolução. Para isto, prepara-se o sistema no estado fundamental do hamiltoniano no tempo inicial e utiliza-se o teorema adiabático para garantir que o sistema não sofra transição para estados excitados.

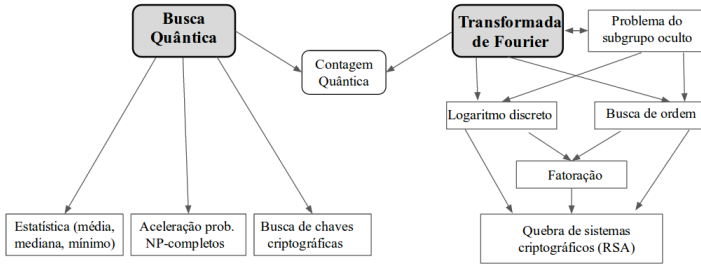


Figura 1: Principais algoritmos quânticos e suas relações. Figura retirada da referência [3].

Aparentemente, os modelos computacionais circuitual e adiabático parecem distintos. Entretanto, W. van Dam [13] e Aharonov et al. [14] analisaram as limitações da computação quântica adiabática e a sua equivalência com o modelo de portas quânticas. Mostraram que o tempo de evolução contínuo T na computação quântica adiabática pode ser aproximado por um circuito quântico implementado em um tempo polinomial $\text{poli}(nT)$.

O estudo da computação quântica adiabática abriu as portas para grandes inovações tecnológicas. A principal delas é o primeiro “computador quântico”, construído pela empresa D-Wave *The Quantum Computing Company* (ver figura 2).



Figura 2: Computador quântico. Figura retirada da referência [15].

O modelo computacional implementado pela D-Wave é especializado em implementar um problema de Ising: dadas n variáveis z_1, z_2, \dots, z_n , que podem assumir os valores ± 1 , o objetivo é encontrar para quais valores as variáveis z_i e z_j minimizam a quantidade

$$M = \sum_{i < j} J_{ij} z_i z_j + \sum_i h_i z_i, \quad (1.1)$$

onde J_{ij} e h_i são números reais. O *hardware* é construído com acopladores e fluxo de qubits supercondutores, de modo que o hamiltoniano quântico do sistema assume a forma

$$H_P = \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_i h_i \sigma_i^z, \quad (1.2)$$

tal que σ_i^z é a matriz de Pauli para o i -ésimo qubit e J_{ij} e h_i representam parâmetros do hardware (energia de acoplamento) e são programados de maneira a permitir o tunelamento no sistema. Assim, minimizar o valor esperado do hamiltoniano através da evolução adiabática faz com que a máquina resolva problemas de otimização. Este método é chamado de *quantum annealing* [16, 17].

Embora tudo o que foi descrito sobre a computação quântica pareça bem estabelecido, é preciso ressaltar que ainda há muito o que ser explorado. Segundo o físico Ivan S. de Oliveira, do grupo de Informação Quântica do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas:

“(...) A noção de que a computação é física abriu espaços até então inimagináveis para a computação. (...) Desde então, o que se vê é a proliferação de resultados teóricos e experimentais espetaculares, tanto na física quanto na ciência da computação.”

Isto indica que efeitos de uma outra teoria física ainda não explorados na computação quântica, por exemplo efeitos relativísticos, possam fornecer um modelo de computação ainda mais poderoso, basta serem explorados. Para ser mais preciso, qualquer teoria física, pode ser usada como base para uma teoria da computação.

Na última década surgiram indícios de que a relatividade pode fornecer algum ganho computacional em relação ao caso em que não se consideram estes efeitos. Um problema da computação quântica que ganhou muito destaque nesta época, e ainda hoje continua sendo objeto de muito estudo, é *discret time quantum walker* e sua relação com a equação de Dirac [19–23]. Tal conexão se deve ao fato da distribuição de probabilidade da caminhada aleatória ser análoga ao espalhamento do pacote de ondas relativístico. Em 2010, J. C. Gracia-Escartin e P. Chamorro-Posada publicaram um artigo no

qual interpretam o algoritmo de busca de Grover como um problema físico de transferência de energia clássica e compararam com sua generalização para o caso relativístico. Mostraram que este algoritmo é mais eficiente quando abordado relativisticamente [18].

Motivados pela ideia de que os efeitos relativísticos possam oferecer um ganho computacional nos algoritmos quânticos, o objetivo desta dissertação é implementar o algoritmo de Deutsch relativístico através da abordagem da computação quântica adiabática.

A presente dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2, abordaremos o tema principal deste trabalho, que é a computação quântica adiabática. Inicialmente faremos uma revisão completa do teorema adiabático, que é a base do funcionamento deste tipo de computação. Em seguida, faremos uma revisão sobre a computação quântica, dando a noção de como funcionam a computação circuitual e a adiabática. Como exemplo, consideraremos o algoritmo de Deutsch nas duas abordagens.

No capítulo 3 exibiremos uma revisão sobre a mecânica quântica relativística que servirá como base na implementação do algoritmo de Deutsch relativístico. Realizaremos uma breve contextualização histórica, abordando primeiramente a equação de Schrödinger e a equação de Klein-Gordon. Por fim, estudaremos a equação de Dirac em $(3+1)$ dimensões, que é o caso mais geral. Contudo, devido ao alto grau de complexidade das soluções desta equação, os casos analisados nesta dissertação serão em $(1+1)$ dimensão. Ao impormos tal restrição encontramos dificuldades para interpretar fisicamente nossos resultados. Portanto, os resultados apresentados nesta dissertação serão considerados apenas do ponto de vista matemático.

No capítulo 4, exporemos os resultados obtidos a respeito da implementação do algoritmo de Deutsch relativístico no âmbito da computação quântica adiabática. Calcularemos a condição adiabática, em termos do tempo de computação, que permitirá analisar a eficiência do algoritmo, ou seja, a condição que garantirá que o mesmo seja computável. Faremos, em seguida, uma comparação do algoritmo implementado com seu análogo não-relativístico, objetivando um ganho no tempo de computação devido aos efeitos relativísticos considerados. Por fim, confirmaremos a validade do teorema adiabático através da solução analítica e numérica da equação de Dirac para qualquer regime de parâmetros do hamiltoniano dependente do tempo.

No capítulo 5, apresentaremos as conclusões do presente trabalho, bem como as perspectivas futuras que se abrem a partir deste estudo.

2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA

2.1 TEOREMA ADIABÁTICO

A palavra “adiabático” tem origem grega ($\alpha\delta\iota\alpha\beta\alpha\iota\nu\iota\nu$ - adiábatos) e significa **impenetrável**. Foi utilizada pela primeira vez em 1859 na termodinâmica por W. J. M. Rankine [24] para indicar um sistema isolado de quaisquer troca de calor, apesar de seu conceito já ter sido muito bem formulado por S. Carnot em 1824 [25]. Com relação a mecânica quântica, o termo apareceu primeiramente com P. Ehrenfest no desenvolvimento da velha teoria quântica entre os anos de 1911-1916 [26–28], e em seguida por Born e Fock (1928) através da demonstração do teorema adiabático [29].

Dentre todas as utilidades deste termo ao longo do tempo, em especial o teorema adiabático possibilitou um aprofundamento em muitos fenômenos físicos e naturalmente adquiriu muitas aplicações ao longo dos anos, em particular no estudo das fases geométricas e na descrição da dinâmica molecular [30–33]. Recentemente, trabalhos pioneiros de Farhi et al. [12, 34–38] propuseram uma nova forma de se realizar a computação quântica fazendo uso deste teorema. O método substitui uma série de portas lógicas quânticas convencionais por um hamiltoniano equivalente dependente do tempo capaz de manter o sistema no estado fundamental durante toda a evolução.

De maneira simplificada, o teorema adiabático afirma que, sob certas condições, se o estado inicial do sistema é um autoestado instantâneo de um hamiltoniano dependente do tempo, então o sistema continuará neste mesmo autoestado do hamiltoniano em tempos posteriores.

Na presente seção demonstraremos matematicamente o teorema adiabático, que é o cerne desta dissertação de mestrado, seguindo a referência [39]. Levaremos em conta sistemas de dimensão finita que evoluem através da equação de Schrödinger nos casos em que o espectro de energia é degenerado e não degenerado. Apresentaremos também uma maneira alternativa de enunciar o teorema através do tempo total de evolução e finalizaremos com um exemplo de uma partícula de spin $1/2$ interagindo com um campo magnético que depende periodicamente do tempo.

2.1.1 Condição sobre o hamiltoniano: caso não-degenerado

Para entender melhor o que significa um processo adiabático, vamos considerar a seguinte situação [40]:

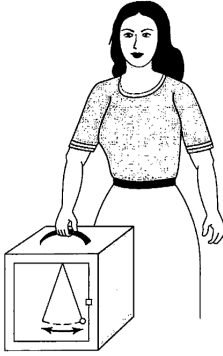


Figura 3: Movimento adiabático.

Considere um pêndulo perfeito, livre de atrito e resistência do ar, oscilando em um plano vertical para frente e para trás (figura 3). Se alguém segurar seu suporte e agitá-lo de forma irregular, o pêndulo oscilará caoticamente. Entretanto, se alguém mover o suporte muito gentilmente e de forma constante, o pêndulo continuará a oscilar de forma suave no mesmo plano (ou em um plano paralelo) com a mesma amplitude.

A mudança gradual das condições externas, caracteriza um regime adiabático.

Na mecânica quântica, o conceito de adiabaticidade é expresso através de um teorema. Vamos considerar um sistema que evolui através da equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\hbar |\dot{\Psi}(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

onde $H(t)$ é o hamiltoniano e $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H}^D$ é um estado quântico do sistema que pertence a um espaço de Hilbert de dimensão D .

Inicialmente, vamos assumir que o espectro de H seja completamente discreto e não degenerado. Desta forma, podemos definir uma base instantânea de autoestados através de

$$H(t) |n(t)\rangle = E_n(t) |n(t)\rangle, \quad (2.2)$$

onde $\langle k(t) | n(t) \rangle = \delta_{kn}$, $k, n = 1, \dots, D$ e E_n são as autoenergias instantâneas.

Seja $|\Psi(t)\rangle$ um estado qualquer do sistema. Expandindo-o em termos da base dos autoestados instantâneos de $H(t)$, vemos que

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle, \quad (2.3)$$

onde o coeficiente $a_n(t)$ é uma função complexa dependente do tempo, tal

que

$$\sum_{n=1}^D |a_n(t)|^2 = 1. \quad (2.4)$$

Para simplificar a notação nas equações a seguir, omitiremos o parâmetro t em $a_n(t)$, $E_n(t)$ e $|n(t)\rangle$. Sendo assim, substituindo (2.3) em (2.1), ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} \overbrace{H|n\rangle}^{=E_n|n\rangle} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |n\rangle \right) \\ &= i\hbar \sum_{n=1}^D a_n \left(\frac{-i}{\hbar} E_n \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |n\rangle \\ &\quad + i\hbar \sum_{n=1}^D \dot{a}_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |n\rangle \\ &\quad + i\hbar \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |\dot{n}\rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \cancel{\sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} E_n |n\rangle} &= \cancel{\sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} E_n |n\rangle} \\ &\quad + i\hbar \sum_{n=1}^D \dot{a}_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |n\rangle \\ &\quad + i\hbar \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |\dot{n}\rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\implies \sum_{n=1}^D \dot{a}_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |n\rangle = - \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n} |\dot{n}\rangle. \quad (2.7)$$

Multiplicando a equação (2.7) por $\langle k|$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^D \dot{a}_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} \overbrace{\langle k|n \rangle}^{=\delta_{kn}} &= - \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} \langle k|\dot{n} \rangle, \\ \dot{a}_k e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_k(t')} &= - \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} \langle k|\dot{n} \rangle, \\ \implies \dot{a}_k &= - \sum_{n=1}^D a_n e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}(t')} \langle k|\dot{n} \rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $g_{nk}(t') \equiv E_n(t') - E_k(t')$.

Podemos reescrever o termo $\langle k|\dot{n} \rangle$ presente na equação (2.8) em uma forma mais conveniente. Derivando (2.2),

$$\dot{H}|n\rangle + H|\dot{n}\rangle = \dot{E}_n|n\rangle + E_n|\dot{n}\rangle \quad (2.9)$$

e multiplicando (2.9) por $\langle k|$,

$$\begin{aligned} \langle k|\dot{H}|n\rangle + \overbrace{\langle k|H|\dot{n}\rangle}^{=\langle k|E_k|\dot{n}\rangle} &= \dot{E}_n \langle k|n\rangle + E_n \langle k|\dot{n}\rangle, \\ \langle k|\dot{H}|n\rangle + E_k \langle k|\dot{n}\rangle &= \dot{E}_n \delta_{kn} + E_n \langle k|\dot{n}\rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

obtemos

$$\langle k|\dot{H}|n\rangle = \dot{E}_n \delta_{kn} + g_{nk} \langle k|\dot{n}\rangle. \quad (2.11)$$

A partir da expressão (2.11) podemos concluir que:

i) para $k = n$,

$$\dot{E}_n = \langle n|\dot{H}|n\rangle; \quad (2.12)$$

ii) para $k \neq n$,

$$\langle k|\dot{n}\rangle = \frac{\langle k|\dot{H}|n\rangle}{g_{nk}}. \quad (2.13)$$

Substituindo o resultado (2.13) em (2.8),

$$\dot{a}_k = -a_k \langle k|\dot{k}\rangle - \sum_{n=1, n \neq k}^D a_n \frac{\langle k|\dot{H}|n\rangle}{g_{nk}} e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}}. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) nos fornece a dinâmica de cada coeficiente $a_k(t)$.

De acordo com a referência [41], o teorema adiabático é definido como

segue:

“Se um sistema quântico descrito por um hamiltoniano dependente do tempo não degenerado estiver inicialmente no n -ésimo autoestado de $H(t_0)$, e se $H(t)$ evoluir de forma suficientemente lenta, então o estado do sistema no tempo t_1 permanecerá no n -ésimo autoestado de $H(t_1)$ ”.

A figura 4 ilustra a evolução adiabática do n -ésimo autoestado instantâneo do hamiltoniano.

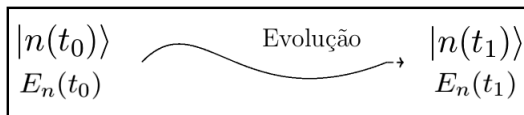


Figura 4: Evolução adiabática do n -ésimo autoestado instantâneo do hamiltoniano de t_0 a t_1 .

Uma maneira alternativa de compreender a definição dada acima para adiabaticidade é através do conceito de cruzamento de níveis. Olhando para a equação (2.14) vemos que, para que não haja transição do k -ésimo autoestado para os demais, o segundo termo do lado direito deve ser nulo, ou aproximadamente nulo. Isto só será alcançado para todo $a_n \neq 0$ se a diferença de energia $g_{nk} = E_n - E_k \neq 0$. Isto significa que as energias não podem se cruzar para nenhum tempo t . Caso contrário, haverá cruzamento dos níveis e o regime é classificado como não adiabático. A figura 5, apresenta um esboço do comportamento do espectro de energia sem cruzamento dos níveis e com cruzamento.

Voltando para a equação (2.14), vemos que a *evolução independente de cada autoestado instantâneo do hamiltoniano* mencionada no teorema adiabático é refletida como uma exigência para que não haja termos de acoplamento entre os autoestados. Desta maneira, para obtermos uma expressão matemática para a adiabaticidade condizente com o teorema, vamos manipular a equação (2.14) a fim de se eliminarmos estes termos.

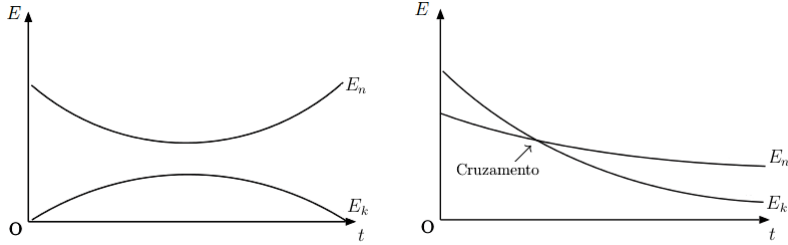


Figura 5: (a) Esboço de um espectro de energia com $gap\ g_{nk} = E_n - E_k \neq 0$ durante toda a evolução. Não há cruzamento dos níveis. (b) Esboço de um espectro de energia com cruzamento dos níveis. Figuras retiradas da referência [58].

Primeiramente, vamos multiplicá-la por um fator de fase¹ $e^{-i\gamma_k(t)}$ pelo lado direito, onde $\gamma_k(t) = i \int_0^t dt' \langle k|\dot{k} \rangle$. Assim,

$$\dot{a}_k e^{-i\gamma_k} = -a_k \langle k|\dot{k} \rangle e^{-i\gamma_k} - \sum_{n \neq k, n=1}^D a_n \frac{\langle k|\dot{H}|n \rangle}{g_{nk}} e^{-i\gamma_k} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}}. \quad (2.15)$$

Manipulando o lado esquerdo da equação (2.15), percebemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_k) e^{-i\gamma_k} &= \frac{d}{dt}(a_k e^{-i\gamma_k}) - a_k \frac{d}{dt}(e^{-i\gamma_k}) \\ &= \frac{d}{dt}(a_k e^{-i\gamma_k}) - a_k \langle k|\dot{k} \rangle e^{-i\gamma_k}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo o resultado acima na equação (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_k e^{-i\gamma_k}) &= - \sum_{n \neq k, n=1}^D a_n \frac{\langle k|\dot{H}|n \rangle}{g_{nk}} e^{-i\gamma_k} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}} \\ &= - \sum_{n \neq k, n=1}^D \frac{F_{nk}}{g_{nk}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $F_{nk} = a_n \langle k|\dot{H}|n \rangle e^{-i\gamma_k}$. Vamos agora integrar a equação (2.17) no inter-

¹A fase pela qual multiplicamos a equação (2.14) é a chamada fase de geométrica. Será explicada na seção 2.1.3.

valo de tempo $0 \leq t \leq T$, onde T é o tempo total da evolução. Assim,

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (a_k e^{-i\gamma_k}) dt = - \sum_{n \neq k, n=1}^D \int_0^T \frac{F_{nk}}{g_{nk}} e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}} dt \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k(T) e^{-i\gamma_k(T)} &= a_k(0) - i\hbar \sum_{n \neq k, n=1}^D \int_0^T \frac{F_{nk}}{g_{nk}} \frac{d}{dt} (e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}}) dt, \\ &= a_k(0) - i\hbar \sum_{n \neq k, n=1}^D \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{F_{nk}}{g_{nk}^2} e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}} \right) dt \\ &\quad + i\hbar \sum_{n \neq k, n=1}^D \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{F_{nk}}{g_{nk}^2} \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}} dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A primeira integral do lado direito da expressão (2.19) é simplesmente

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{F_{nk}}{g_{nk}^2} e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}} \right) dt = \frac{F_{nk}(T)}{g_{nk}^2(T)} e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^T g_{nk}(t') dt'} - \frac{F_{nk}(0)}{g_{nk}^2(0)}. \quad (2.20)$$

Para resolver a segunda integral realizamos a mudança de variável $t = sT$, onde $0 \leq s \leq 1$. Assim, ficamos com

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{F_{nk}}{g_{nk}^2} \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{nk}} dt = \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{F_{nk}}{g_{nk}^2} \right) e^{\frac{-iT}{\hbar} \int_0^s g_{nk} ds'} ds. \quad (2.21)$$

A medida que o tempo total de evolução T do sistema cresce, a integral (2.21) se anula de acordo com o lema de Riemann-Lebesgue²,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{F_{nk}}{g_{nk}^2} \right) e^{\frac{-iT}{\hbar} \int_0^s g_{nk} ds'} ds = 0. \quad (2.23)$$

Por fim, substituindo os resultados (2.20) e (2.23) em (2.19), obtemos a se-

²*Lema de Riemann-Lebesgue:* Se $f(x)$ é uma função Riemann-integrável definida no intervalo $a \leq x \leq b \in \mathbb{R}$, então para qualquer número real α

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (2.22)$$

guinte expressão para os coeficientes a_k 's

$$a_k(T) = a_k(0)e^{i\gamma_k(T)} + i\hbar \sum_{n \neq k, n=1}^D \left[\frac{F_{nk}(0)}{g_{nk}^2(0)} - \frac{F_{nk}(T)}{g_{nk}^2(T)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T g_{nk}(t') dt'} \right] e^{i\gamma_k(T)}. \quad (2.24)$$

Analizando a equação (2.24), podemos notar que $a_k(T)$ é uma função iterada, pois o termo $F_{nk}(T) = a_n(T) [\langle k | \dot{H} | n \rangle]_{t=T} e^{-i\gamma_k(T)}$ é função de $a_n(T)$. A expressão abaixo mostra como fica $a_k(T)$ se fizermos apenas uma substituição de $F_{nk}(T)$:

$$\begin{aligned} a_k(T) = & a_k(0)e^{i\gamma_k(T)} + i\hbar \left[\sum_{n \neq k, n=1}^D \frac{a_n(0) \langle k | \dot{H} | n \rangle}{g_{nk}^2(0)} \right. \\ & \left. - \frac{a_n(T) \langle k | \dot{H} | n \rangle}{g_{nk}^2(T)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T g_{nk}(t') dt'} e^{-i\gamma_k(T)} \right] e^{i\gamma_k(T)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Além disso, como estamos impondo a adiabaticidade do sistema, percebemos que para eliminarmos os termos com acoplamento entre os estados $|n\rangle$ e $|k\rangle$, o termo $\frac{\langle k | \dot{H}(t) | n \rangle}{g_{nk}^2(t)} \ll 1$ para qualquer tempo t , pois $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t g_{nk} dt'}$ é uma função limitada. Mais precisamente, a seguinte condição deve ser imposta:

onde

$$\mathcal{F} \ll \mathcal{G}^2, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{F} = \hbar \max_{0 \leq t \leq T} \left| \left\langle k \left| \frac{dH}{dt} \right| n \right\rangle \right|, \quad (2.27a)$$

$$\mathcal{G} = \min_{0 \leq t \leq T} |g_{nk}|. \quad (2.27b)$$

Note que as condições de máximo e mínimo tomadas sobre as funções $\mathcal{F}(t)$ e $\mathcal{G}(t)$ indicam que estamos tomando como condição o pior caso possível.

A interpretação de (2.26) pode ser feita da seguinte forma: para todo par de níveis de energia, E_n e E_k , o máximo valor obtido para o elemento de matriz da variação temporal do hamiltoniano deve ser muito menor que o mínimo valor obtido para a diferença de energia entre estes dois níveis. Isto garante que a evolução ocorra em um regime adiabático.

2.1.2 Condição sobre o hamiltoniano: caso degenerado

Quando há degenerescência no sistema podemos definir uma base instantânea de autoestados através de

$$H(t) |n(t), i\rangle = E_n(t) |n(t), i\rangle, \quad (2.28)$$

onde $\langle k(t), j | n(t), i \rangle = \delta_{kn} \delta_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, g_n$ e g_n é o grau de degenerescência.

Expandindo $|\psi(t)\rangle$ em termos da base dos autoestados instantâneos de $H(t)$, vemos que

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D \sum_{i=1}^{g_n} a_{ni}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t), i\rangle, \quad (2.29)$$

onde o coeficiente $a_{ni}(t)$ é uma função complexa dependente do tempo, tal que

$$\sum_{n=1}^D \sum_{i=1}^{g_n} |a_{ni}(t)|^2 = 1.$$

Procedendo de maneira similar ao caso não-degenerado, vemos que a condição (2.26) possui a mesma interpretação, porém restringe-se somente aos casos em que $E_k \neq E_n$, ou seja, quando os níveis de energia são diferentes. Matematicamente, a condição é dada por

$$\mathcal{F} \ll \mathcal{G}^2, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{F} = \hbar \max_{0 \leq t \leq T} \left| \left\langle k, j \left| \frac{dH}{dt} \right| n, i \right\rangle \right| \quad \text{e} \quad \mathcal{G} = \min_{0 \leq t \leq T} |g_{nk}|. \quad (2.31)$$

2.1.3 Evolução do estado do sistema

Como vimos na seção anterior, se temos um sistema quântico descrito por um hamiltoniano que varia com o tempo, a evolução do sistema é descrita pela equação de Schrödinger dependente do tempo (2.1). Além disso, podemos escolher uma base de autoestados instantâneos que obedecem a equação (2.2) de modo que o estado do sistema pode ser escrito como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{i\theta_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (2.32)$$

onde

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (2.33)$$

é a chamada de fase dinâmica do sistema.

Devido a condição adiabática (2.26), que permite que uma partícula que inicie sua evolução no n -ésimo autoestado instantâneo permaneça no n -ésimo autoestado correspondente no final da evolução, um novo fator de fase, chamada de fase geométrica, também dependente do tempo surge na função de onda após a evolução. Tal fase é obtida de (2.25) após a aplicação da condição adiabática, $a_k(t) = a_k(0)e^{i\gamma_k(t)}$, onde $\phi_n(t) = \theta_n(t) + \gamma_n(t)$ e

$$\gamma_n = i \int_0^t \langle n(t') | \frac{d}{dt'} | n(t') \rangle dt'. \quad (2.34)$$

FASE GEOMÉTRICA

A princípio esperaríamos que o fator de fase que aparece no estado do sistema no fim da evolução, como consequência da condição adiabática imposta, fosse idêntico a $\theta_n(t)$. Entretanto, vimos que na verdade este fator de fase ganha mais uma contribuição $\gamma_n(t)$ que chamamos de fase geométrica (ou fase de Berry). Ela aparece em qualquer sistema cujo hamiltoniano depende de um parâmetro real multidimensional, $\vec{R}(t)$, que parametriza o sistema. Assim, podemos escrever a fase geométrica como

$$\gamma(t) = i \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_f} \langle n(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (2.35)$$

Se a evolução do sistema for cíclica, ou seja, $\vec{R}(0) = \vec{R}(T)$,

$$\gamma(C) = i \oint \langle n(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R}, \quad (2.36)$$

essa fase é conhecida como fase de Berry [30].

2.1.4 Condição no Tempo Total de Evolução

Para obtermos o tempo total da evolução, T , fazemos a mudança de variáveis $t = sT$ ($0 \leq s \leq 1$) na condição adiabática (2.26)

$$H(t) \rightarrow H(s), \quad (2.37)$$

$$g_{nk}(t) \rightarrow g_{nk}(s), \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{T} \frac{d}{ds}. \quad (2.39)$$

Com isso,

$$\frac{\hbar}{T} \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \left\langle k \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| n \right\rangle \right| \ll \min_{0 \leq s \leq 1} |g_{nk}(s)|^2, \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow T \gg \frac{\hbar \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \left\langle k \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| n \right\rangle \right|}{\min_{0 \leq s \leq 1} |g_{nk}(s)|^2}. \quad (2.41)$$

A expressão (2.41) fornece uma condição para o tempo total da evolução que garante a adiabaticidade do sistema. Observe na expressão acima que, para que esta condição exista, o *gap* deve ser diferente de zero durante toda a evolução. Além do mais, a largura desse *gap* indicará o quão rápido o sistema se torna adiabático.

2.1.5 Exemplo: elétron interagindo com o campo magnético dependente do tempo

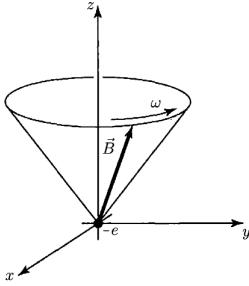


Figura 6: Campo magnético descrevendo um cone com velocidade angular constante ω .

Imagine um elétron (de carga $-e$ e massa m) em repouso na origem do sistema de coordenadas interagindo com um campo magnético de magnitude constante B_0 , cuja direção descreve um cone de ângulo α com uma velocidade angular ω . Matematicamente, podemos expressar o campo da seguinte forma

$$\vec{B} = B_0(\sin \alpha \cos \omega t, \sin \alpha \sin \omega t, \cos \alpha), \quad (2.42)$$

O hamiltoniano do sistema é dado por $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma_e \vec{S} \cdot \vec{B}$, onde $\gamma_e = \frac{-e}{m_e}$ é a razão giromagnética, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ e $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Substituindo \vec{B} e \vec{S} em H , temos que

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{eB_0\hbar}{2m_e}(\sigma_x \sin \alpha \cos \omega t + \sigma_y \sin \alpha \sin \omega t + \sigma_z \cos \alpha) \\ &= \frac{\omega_0\hbar}{2}(\sigma_x \sin \alpha \cos \omega t + \sigma_y \sin \alpha \sin \omega t + \sigma_z \cos \alpha), \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $\omega_0 \equiv \frac{eB_0}{m_e}$.

Inicialmente, vamos encontrar os autoestados e autoenergias de H . Para isto, vamos escrever o hamiltoniano matricialmente

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{\omega_0\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\omega t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\omega_0\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\omega t) \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\omega_0\hbar}{2} \cos \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\omega_0\hbar}{2} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\omega t} \\ \sin \alpha e^{i\omega t} & -\cos \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

1. Autovalores de H :

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I) &= 0, \\ \frac{\omega_0 \hbar}{2} \begin{vmatrix} \cos \alpha - 2\lambda / \hbar \omega_0 & \text{sen } \alpha e^{-i\omega t} \\ \text{sen } \alpha e^{i\omega t} & -(\cos \alpha + 2\lambda / \hbar \omega_0) \end{vmatrix} &= 0, \\ (\cos \alpha - 2\lambda / \hbar \omega_0)(\cos \alpha + 2\lambda / \hbar \omega_0) + (\text{sen } \alpha)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Resolvendo a equação característica acima, obtemos os seguintes autovalores de energia

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{\omega_0 \hbar}{2}. \quad (2.46)$$

2. Autoestados de H

- $\lambda_+ = \frac{\omega_0 \hbar}{2}$

$$\frac{\omega_0 \hbar}{2} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha e^{-i\omega t} \\ \text{sen } \alpha e^{i\omega t} & -\cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\omega_0 \hbar}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Sistema de equações:

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos \alpha)x + (\text{sen } \alpha e^{-i\omega t})y = x \\ (\text{sen } \alpha e^{i\omega t})x - (\cos \alpha)y = y \end{cases}. \quad (2.48)$$

Da primeira equação temos que

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)x + (\text{sen } \alpha e^{-i\omega t})y &= x, \\ (\text{sen } \alpha e^{-i\omega t})y &= \underbrace{(1 - \cos \alpha)}_{=2(\text{sen } \frac{\alpha}{2})^2} x, \\ y &= \frac{2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\text{sen } \alpha} e^{i\omega t} x = \frac{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} e^{i\omega t} x. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Assim,

$$|\chi_+\rangle = \frac{x}{(\cos \frac{\alpha}{2})} \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ (\text{sen } \frac{\alpha}{2}) e^{i\omega t} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Normalizando, $\langle \chi_+ | \chi_+ \rangle = 1$, vemos que

$$\frac{|x|^2}{(\cos \alpha/2)^2} \overbrace{[(\cos \alpha/2)^2 + (\sin \alpha/2)^2]}^{=1} = 1, \quad (2.51)$$

e, a menos de uma fase, obtemos que $x = \cos \alpha/2$. Por fim,

$$|\chi_+\rangle = \begin{bmatrix} \cos \alpha/2 \\ (\sin \alpha/2)e^{i\omega t} \end{bmatrix} = (\cos \alpha/2)|0\rangle + (\sin \alpha/2)e^{i\omega t}|1\rangle, \quad (2.52)$$

onde $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\lambda_- = -\frac{\omega_0 \hbar}{2}$

Procedendo de maneira análoga ao caso do autovalor λ_+ , obtemos que o autoestado instantâneo $|\chi_-\rangle$ é dado por

$$|\chi_-\rangle = \begin{bmatrix} \sin \alpha/2 \\ (-\cos \alpha/2)e^{i\omega t} \end{bmatrix} = (\sin \alpha/2)|0\rangle - (\cos \alpha/2)e^{i\omega t}|1\rangle. \quad (2.53)$$

A fim de encontrarmos uma condição que garanta que o elétron interagindo com o campo magnético evolua no regime adiabático, precisamos calcular (2.26). Vamos inicialmente avaliar $\langle \chi_+ | dH/dt | \chi_- \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_y - \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_x] \\ &= A \sigma_y - B \sigma_x, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde

$$A = \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha \cos \omega t \quad \text{e} \quad B = \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha \sin \omega t. \quad (2.55)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle \chi_+ | dH/dt | \chi_- \rangle &= [\langle 0 | (\cos \alpha/2) + \langle 1 | (\sin \alpha/2)e^{-i\omega t}] \\ &\quad \times [A \sigma_y - B \sigma_x] [(\sin \alpha/2)|0\rangle - (\cos \alpha/2)e^{i\omega t}|1\rangle], \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle \chi_+ | dH/dt | \chi_- \rangle &= [\langle 0 | (\cos \alpha/2) + \langle 1 | (\sin \alpha/2 e^{-i\omega t})] \\
&\quad \times [(iA \sin \alpha/2) | 1 \rangle + (iA \cos \alpha/2 e^{i\omega t}) | 0 \rangle] \\
&\quad - (B \sin \alpha/2) | 1 \rangle + (B \cos \alpha/2 e^{i\omega t}) | 0 \rangle] \\
&= (B + iA)(\cos \alpha/2)^2 e^{i\omega t} \\
&\quad - (B - iA)(\sin \alpha/2)^2 e^{-i\omega t}. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
(B + iA) &= \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha (\sin \omega t + i \cos \omega t) \\
&= i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha e^{-i\omega t} \tag{2.58}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(B - iA) &= \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha (\sin \omega t - i \cos \omega t) \\
&= -i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha e^{i\omega t}, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

substituindo (2.58) e (2.59) em (2.57), ficamos com

$$\begin{aligned}
\langle \chi_+ | dH/dt | \chi_- \rangle &= i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha e^{-i\omega t} (\cos \alpha/2)^2 e^{i\omega t} \\
&\quad - (-) i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha e^{i\omega t} (\sin \alpha/2)^2 e^{-i\omega t} \\
&= i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha \overbrace{[(\cos \alpha/2)^2 + (\sin \alpha/2)^2]}^{=1} \\
&= i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.60) em (2.27a), vemos que

$$\mathcal{F} = \hbar \max_{0 \leq t \leq T} \left| i \frac{\omega \omega_0 \hbar}{2} \sin \alpha \right| = \frac{\omega \omega_0 \hbar^2}{2} \sin \alpha, \tag{2.61}$$

e de (2.27b), temos

$$\mathcal{G} = \min_{0 \leq s \leq T} \left| \frac{\hbar \omega_0}{2} - \left(-\frac{\hbar \omega_0}{2} \right) \right| = \hbar \omega_0. \tag{2.62}$$

Por fim, com os valores obtidos para \mathcal{F} e \mathcal{G} a condição (2.26) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\omega\omega_0\hbar^2}{2}\sin\alpha &\ll \hbar^2\omega_0^2, \\ \Rightarrow \left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)\frac{\omega}{\omega_0} &\ll 1. \end{aligned} \quad (2.63)$$

A condição acima impõe: o sistema estará no regime adiabático quando a frequência angular de oscilação do campo magnético ω for muito menor do que a frequência de transição ω_0 entre os dois níveis de energia.

As fases geométrica e dinâmica do sistema são obtidas de (2.33) e (2.34),

$$\theta_{\pm} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t \pm \frac{\omega_0\hbar}{2} dt' = \mp \frac{\omega_0 t}{2}, \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= i \int_0^t \langle \chi_+ | \frac{d}{dt'} | \chi_+ \rangle dt' \\ &= i \int_0^t [\langle 0 | (\cos \alpha/2) + \langle 1 | (\sin \alpha/2 e^{-i\omega t'}) \rangle] (i\omega) (\sin \alpha/2 e^{i\omega t'} | 1 \rangle) dt' \\ &= -\omega t \sin^2 \alpha/2, \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \gamma_- &= i \int_0^t \langle \chi_- | \frac{d}{dt'} | \chi_- \rangle dt' \\ &= i \int_0^t [\langle 0 | (\sin \alpha/2) - \langle 1 | (\cos \alpha/2 e^{-i\omega t'}) \rangle] (-i\omega) (\cos \alpha/2 e^{i\omega t'} | 1 \rangle) dt' \\ &= -\omega t \cos^2 \alpha/2. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por fim, podemos escrever o estado do sistema da seguinte forma

$$|\Psi(t)\rangle = a_-(0)e^{i(\omega_0/2 - \omega \cos^2 \alpha/2)t} |\chi_-(t)\rangle + a_+(0)e^{-i(\omega_0/2 - \omega \sin^2 \alpha/2)t} |\chi_+(t)\rangle, \quad (2.67)$$

onde os coeficientes $a_{\pm}(0)$ são determinados pelas condições iniciais do sistema.

2.2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA CIRCUITAL

A origem da ciência da computação clássica se deve ao célebre matemático A. M. Turing, que em 1936 [42] desenvolveu a noção abstrata de um computador programável, conhecida como máquina de Turing. Sua sig-

nificância se baseia no fato de que, dada uma quantidade grande, porém finita, de tempo, a máquina universal de Turing é capaz de executar qualquer computação realizável por um computador clássico, independentemente de quão poderoso seja este computador.

O interesse em computadores quânticos - computadores baseados nos princípios da física quântica - emergiu no ano de 1982 com o célebre Feynman [2] e, independentemente, com Benioff [6]. Feynman tinha como motivação a simulação de processos quânticos e defendia a ideia de que um sistema quântico seria simulado de maneira mais eficiente e natural em um computador quântico do que em um computador clássico. Por outro lado, Benioff enfatizava que aproveitar os efeitos quânticos ajudaria a superar a barreira de miniaturização de circuitos integrados e estabeleceria novos patamares na computação.

A conexão fundamental entre as leis da física e o que é computável se solidificou com o trabalho de D. Deutsch, em 1985 [7]. Neste artigo, Deutsch propôs um modelo computacional que reformulava a máquina de Turing, porém matinha seu poder de computação. Ele estabeleceu o seguinte princípio: *Qualquer sistema físico possível de ser realizado pode, perfeitamente, ser simulado por uma máquina universal que opera em meios finitos.*

Por sua teoria ser mais concreta e mais compatível com a ciência da computação tradicional do que outras propostas até então, o “computador” de Deutsch é considerado o primeiro modelo computacional da computação quântica. Pouco tempo depois, em 1988 [8], Deutsch formulou o modelo de portas lógicas quânticas, possibilitando a construção de algoritmos quânticos. Esta importante contribuição foi o primeiro passo para a realização de computadores quânticos.

Assim como os computadores clássicos são constituídos por circuitos elétricos contendo fios e portas lógicas, um computador quântico é constituído por um *circuito quântico* contendo fios e *portas lógicas quânticas* que carregam e manipulam a informação de um lado para outro [3]. Basicamente, estes circuitos trabalham em série e em paralelo para executar uma determinada tarefa e operam em qubits³, explorando suas propriedades quânticas de superposição e emaranhamento. Acredita-se que tais propriedades os tornem muito mais rápidos do que os computadores clássicos tradicionais.

Há algumas portas que, classicamente e quanticamente, atuam de maneira similar nos estados de entrada, porém, um exemplo interessante a se considerar para análise da diferença entre as portas lógicas é a porta de Hadamard,

³Os qubits, em analogia com os bits clássicos, são a menor unidade de informação quântica. Podem assumir tanto os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ quanto uma superposição dos mesmos, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, onde α e $\beta \in \mathbb{C}$. Isto se reflete em uma maior capacidade de armazenamento de informação, que cresce exponencialmente (2^n) com o número de qubits n .

que não possui análogo clássico. Esta operação lógica é definida como

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

e, sua atuação nos autoestados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (autoestados da matriz σ_z de Pauli), leva às superposições

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.69)$$

A figura 7 mostra a representação circuital desta operação sobre um qubit.

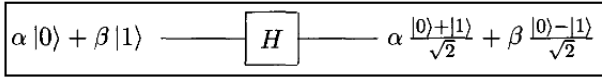


Figura 7: Representação da atuação da porta lógica de Hadamard em um qubit.

Vale ressaltar que, além da porta Hadamard, existe uma infinidade de portas quânticas que atuam sobre um qubit, porém todas elas devem ser matrizes unitárias⁴ 2×2 .

Naturalmente, os circuitos podem ser generalizados e implementados com vários qubits. O protótipo de uma porta lógica quântica de dois qubits é o *NÃO-controlado* (ou CNOT). Essa porta tem dois qubits de entrada, conhecidos como qubit de controle e qubit alvo, respectivamente. O circuito que representa a CNOT é mostrado na figura 8 abaixo. Matricialmente, a porta lógica CNOT é representada por

$$U_{\text{CN}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

⁴Uma matriz unitária U é aquela que obedece $U^\dagger U = \mathbb{1}$ e $UU^\dagger = \mathbb{1}$, onde U^\dagger é a matriz adjunta de U e $\mathbb{1}$ é a matriz identidade.

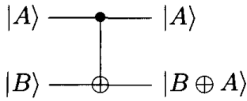


Figura 8: Porta lógica quântica CNOT, onde $|A\rangle$ é o qubit de controle e $|B\rangle$ é o qubit alvo.

A ação desta porta pode ser descrita da seguinte maneira: $|A, B\rangle \rightarrow |A, B \oplus A\rangle$, onde a operação $B \oplus A$ é a adição módulo 2. Assim, se o qubit de controle for o estado $|0\rangle$ nada acontece com o alvo e se o qubit de controle for $|1\rangle$, o alvo troca seu estado:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle; \quad |10\rangle \rightarrow |11\rangle; \quad (2.71)$$

$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle; \quad |11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (2.72)$$

Em suma, para se realizar a computação quântica precisamos de um algoritmo quântico, ou seja, precisamos atuar uma sequência finita de operações com as portas lógicas nos qubits que compõem o estado inicial. O resultado da computação (ou solução do problema) é obtido através de medidas projetivas apropriadas nos qubits após passarem por todas as etapas. A figura 9 ilustra a computação quântica feita através do modelo de portas lógicas.

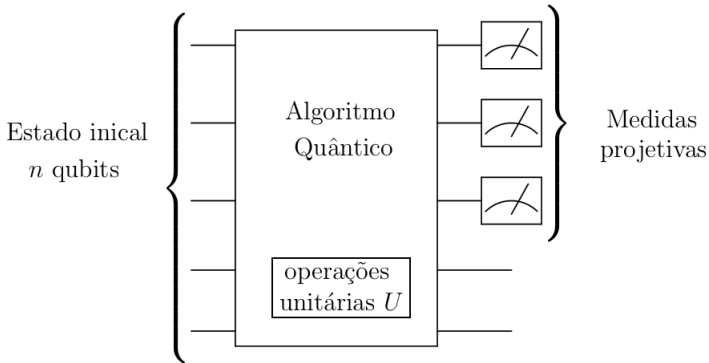


Figura 9: Representação circuitual de um algoritmo quântico para n qubits.

Diferentes modelos de computação levam a diferentes necessidades de recursos computacionais, como espaço, tempo e energia. Quando comparamos alguns algoritmos quânticos com seus análogos clássicos, notamos que os primeiros aumentam consideravelmente a eficiência da computação, pois são capazes de resolver os mesmos problemas que um computador clássico, mas sem utilizar uma quantidade absurda de recursos. Um algoritmo quântico de busca, como o de Grover [11] por exemplo, é capaz de fazer uma busca em

uma base de n dados desordenada levando um tempo da ordem⁵ de $O(\sqrt{n})$ em um modelo quântico de computação, enquanto que qualquer algoritmo clássico do mesmo tipo levaria um tempo da ordem⁶ $\Omega(n)$ para realizar essa busca. Há um ganho quadrático de tempo do algoritmo quântico sobre os equivalentes clássicos. Outros algoritmos de grande destaque na computação quântica são os que se baseiam na transformada de Fourier quântica de Shor [10], que inclui algoritmos para resolver problemas de fatoração com ganho exponencial de velocidade sobre os melhores algoritmos clássicos conhecidos.

2.3 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA ADIABÁTICA

Recentemente, a computação quântica adiabática foi proposta como uma alternativa para o modelo de portas lógicas quânticas [12]. Neste tipo de computação, a sequência de operações unitárias aplicadas aos qubits (de maneira discreta) são substituídas por um hamiltoniano que depende continuamente do tempo, de modo que o algoritmo funciona da seguinte forma :

- i) a solução do problema, supostamente, está codificada no estado fundamental do hamiltoniano no final da evolução, $H(T)$;
- ii) o hamiltoniano inicial, $H(0)$, é escolhido de forma que seu estado fundamental seja conhecido e facilmente implementado;
- iii) o hamiltoniano que governa a evolução do sistema é construído de maneira que interpole⁷ linearmente $H(0)$ e $H(T)$. Assim,

$$H(s) := (1 - s)H(0) + sH(T), \quad (2.73)$$

onde $s = t/T$ e $0 \leq s \leq 1$.

- iv) através do teorema adiabático (2.41), obtém-se a condição para que o sistema evolua do estado fundamental de $H(0)$ até o estado fundamental de $H(T)$, garantindo a resposta da computação.

⁵A notação “ O ” é usada para indicar os *limites superiores* de uma função. Esta notação é particularmente útil quando se estuda o pior caso de comportamento de algum algoritmo específico, quando frequentemente será suficiente conhecermos o limite superior para os recursos consumidos. Por exemplo, a função $2n$ é da classe $O(n^2)$, pois $2n \leq 2n^2$ para todo n positivo.

⁶A notação “ Ω ” é usada para indicar os *limites inferiores* para os recursos necessários. Por exemplo, a função 2^n é da ordem $\Omega(n^3)$, pois $n^3 \leq 2^n$ para n suficientemente grande.

⁷Existem diversas maneiras de se interpolar $H(0)$ e $H(T)$ na computação quântica adiabática [43], porém a linear que é a original, é bastante utilizada [44–47].

No algoritmo original, consideramos que a resposta do sistema esteja no estado fundamental. Porém, esta não é uma condição obrigatória, basta que a evolução do sistema seja adiabática (ver figura 4).

Apesar do modo de computação de ambos modelos elencados parecerem distintos, W. van Dam [13] e Aharonov et al. [14] analisaram as limitações da computação quântica adiabática e a sua equivalência com o modelo de portas quânticas. Mostraram que o tempo de evolução contínuo T na computação quântica adiabática pode ser aproximado por um circuito quântico implementado em um tempo polinomial $\text{poli}(nT)$.

Um algoritmo que funciona muito bem em suas duas versões, circuitual e adiabática, é o algoritmo de Deutsch. Por este motivo, e também por ser um algoritmo simples de se trabalhar, o consideramos como objeto de estudo nesta dissertação. Na próxima seção, veremos como este algoritmo funciona e mais tarde, no capítulo 4, implementaremos a sua versão adiabática relativística.

2.3.1 Algoritmo de Deutsch

O algoritmo de Deutsch, é um bom exemplo para salientar a vantagem de um algoritmo quântico em relação ao clássico. Detém pouca importância prática dentro da computação quântica, uma vez que não possui aplicações significativas. Em contrapartida, apresenta grande relevância teórica, pois contém as sementes para algoritmos quânticos mais sofisticados e aplicáveis experimentalmente.

Basicamente, este algoritmo consiste em determinar se uma dada função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ é constante ou balanceada. A tabela abaixo esquematiza os valores possíveis para $f(x)$.

x	$f(x) \rightarrow$ constante		$f(x) \rightarrow$ balanceada	
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Na computação clássica, precisaríamos calcular os valores de $f(0)$ e de $f(1)$, e compará-los para extrair a propriedade desejada. Uma maneira de comparar, por exemplo, é calcular a soma modular de base 2,

$$[f(0) + f(1)] \pmod{2} = \begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ é constante,} \\ 1, & \text{se } f \text{ é balanceada.} \end{cases} \quad (2.74)$$

Quando utilizamos a computação quântica, resolvemos o problema executando o algoritmo apenas uma vez. Vamos entender como funciona o

algoritmo circuitual quântico de Deutsch através de uma abordagem moderna, proposta por Collins et al. [48]. Em seguida, abordaremos o problema via computação quântica adiabática nos baseando na referência [49].

2.3.1.1 Computação cuircuitual

Definimos uma função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ como: i) balanceada se o número de vezes que ela retorna 0 é igual ao número de vezes que retorna 1; ii) constante se sempre retornar 0 ou sempre retornar 1. O algoritmo determina se uma função f é do tipo constante ou balanceada. As etapas do circuito quântico são:

i) prepara-se o estado inicial do sistema. Como exemplo, o estado inicial considerado é $|\phi_0\rangle = |0\rangle$;

ii) aplica-se a operação Hadamard H no estado inicial. Com isso, o estado transformado fica

$$|\phi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (2.75)$$

iii) aplica-se em $|\phi_1\rangle$ a operação U_f ⁸, definida por

$$U_f |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle. \quad (2.76)$$

Dessa forma,

$$|\phi_2\rangle = U_f |\phi_1\rangle = \frac{(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (2.77)$$

iv) aplica-se novamente a transformação H . Assim,

$$\begin{aligned} |\phi_3\rangle &= H |\phi_2\rangle = \frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}} \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{(-1)^{f(1)}}{\sqrt{2}} \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \left[\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} \right] |0\rangle + \left[\frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} \right] |1\rangle; \end{aligned} \quad (2.78)$$

⁸O funcionamento interno da operação U_f é desconhecido; neste caso é simplesmente projetado como um programa de computador que calcula os valores de $f(x)$. Muitas vezes, o operador U_f também é mencionado como um oráculo para f .

- v) mede-se o estado final. Se o resultado for $|\phi_3\rangle = \pm |0\rangle$, concluímos que a função f é constante, se for $|\phi_3\rangle = \pm |1\rangle$ a função é balanceada.

A Figura 10 ilustra o circuito quântico para o algoritmo de Deutsch descrito acima.

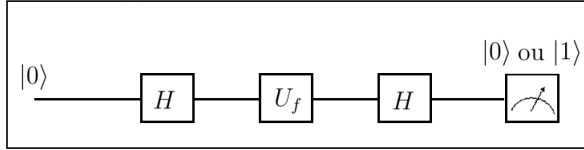


Figura 10: Circuito quântico para o algoritmo de Deutsch.

2.3.1.2 Computação quântica adiabática

Para implementar o algoritmo de Deutsch via computação quântica adiabática nos basearemos na referência [49]. Vamos supor que estamos considerando um sistema de dois níveis, como por exemplo uma partícula de spin $1/2$. Logo, podemos definir os hamiltonianos inicial $H(0)$ e final $H(T)$ do sistema da seguinte forma

$$H(0) := \hbar\omega(\mathbb{1} - |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|), \quad (2.79a)$$

$$H(T) := \hbar\omega(\mathbb{1} - |\Psi_T\rangle\langle\Psi_T|), \quad (2.79b)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 e

$$|\Psi_0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.80a)$$

$$|\Psi_T\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.80b)$$

são os estados inicial e final do sistema, respectivamente. Os coeficientes são dados por

$$\alpha = \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|}{2}, \quad (2.81a)$$

$$\beta = \frac{|(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}|}{2}. \quad (2.81b)$$

e obedecem $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. O algoritmo de Deutsch está codificado nas equações (2.81a) e (2.81b). Verificamos que se f for uma função constante, então $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Se f for balanceada, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Desta forma, podemos inferir as seguintes relações entre estes coeficientes

$$\alpha + \beta = 1, \quad (2.82a)$$

$$\alpha^2 = \alpha, \quad \beta^2 = \beta, \quad (2.82b)$$

$$\alpha\beta = 0. \quad (2.82c)$$

Se determinarmos que o sistema esteja no estado inicial $|\Psi_0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ e que, de acordo com (2.73), evolui através do hamiltoniano

$$H(s) = \hbar\omega(1-s)(\mathbb{1} - |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|) + s(\mathbb{1} - |\Psi_T\rangle\langle\Psi_T|), \quad (2.83)$$

onde $s = t/r$, então, podemos encontrar a condição para que a evolução seja adiabática através da equação (2.26). Note que o problema de Deutsch está codificado no hamiltoniano que governa a evolução do sistema (2.83).

Sabemos que

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

e, de maneira análoga,

$$|\Psi_T\rangle\langle\Psi_T| = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \beta\alpha & \beta^2 \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Substituindo os resultados acima em (2.83), obtemos

$$H(s) = \hbar\omega(1-s) \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + \hbar\omega s \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & 1-\beta^2 \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Utilizando as propriedades (2.82a), (2.82b) e (2.82c) em (2.87), o hamiltoni-

ano finalmente pode ser escrito por

$$H(s) = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{bmatrix} 1+s(2\beta-1) & -(1-s) \\ -(1-s) & 1-s(2\beta-1) \end{bmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{bmatrix} 1+\gamma & -(1-s) \\ -(1-s) & 1-\gamma \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

onde $\gamma \equiv s(2\beta-1)$. Resolvendo a equação

$$H(s) |E_{\pm}, s\rangle = E_{\pm}(s) |E_{\pm}, s\rangle, \quad (2.89)$$

encontramos:

i) autoenergias instantâneas

$$\det[H - \lambda] = 0$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega}{2}(1+\gamma) - \lambda & -\frac{\hbar\omega}{2}(1-s) \\ -\frac{\hbar\omega}{2}(1-s) & \frac{\hbar\omega}{2}(1-\gamma) - \lambda \end{bmatrix} &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^2 - \hbar\omega\lambda + \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 [1 - \underbrace{\gamma^2 - (1-s)^2}_{=1-2s+s^2}] &= 0, \\ \lambda^2 - \hbar\omega\lambda - \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 (1-2s+2s^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Resolvendo a equação (2.90) para λ , obtemos os seguintes autovalores de energia

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(1 \pm \sqrt{1-2s+2s^2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \varepsilon_{\pm}; \quad (2.91)$$

ii) autoestados instantâneos

a) Maior energia

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{bmatrix} 1+\gamma & -(1-s) \\ -(1-s) & 1-\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \cancel{\frac{\hbar\omega}{2}} \varepsilon_+ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} (1+\gamma)u - (1-s)v = \varepsilon_+ u \\ -(1-s)u + (1-\gamma)v = \varepsilon_+ v \end{cases} & \end{aligned} \quad (2.92)$$

Da primeira equação escrevemos $v = \left(\frac{1 + \gamma - \varepsilon_+}{1 - s} \right) u$. Assim, o autoestado de maior energia (normalizado) é dado por

$$|E_+, s\rangle = c_+ \begin{bmatrix} 1 - s \\ 1 + \gamma - \varepsilon_+ \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

onde $c_+ = [(1 - s)^2 + (1 + \gamma - \varepsilon_+)^2]^{-1/2}$.

b) Menor energia

De maneira análoga, obtemos o autoestado de menor energia,

$$|E_-, s\rangle = c_- \begin{bmatrix} 1 - s \\ 1 + \gamma - \varepsilon_- \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

onde $c_- = [(1 - s)^2 + (1 + \gamma - \varepsilon_-)^2]^{-1/2}$.

Podemos agora obter a condição adiabática a partir da equação (2.41). Com o resultado apresentado em (2.91), obtemos

$$g_{+-} = \Delta E = \hbar\omega\sqrt{1 - 2s + 2s^2}. \quad (2.95)$$

De (2.88),

$$\begin{aligned} \frac{dH}{ds} &= \frac{\hbar\omega}{2} \begin{bmatrix} 2\beta - 1 & 1 \\ 1 & -(2\beta - 1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} [(2\beta - 1)|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - (2\beta - 1)|1\rangle\langle 1|], \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \left\langle E_+, s \left| \frac{dH}{ds} \right| E_-, s \right\rangle &= \frac{c_+ c_- \hbar\omega}{2} [\langle 0| (1 - s) + \langle 1| (1 + \gamma - \varepsilon_+)] \\ &\quad \times [(2\beta - 1)|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - (2\beta - 1)|1\rangle\langle 1|] \\ &\quad \times [(1 - s)|0\rangle + (1 + \gamma - \varepsilon_-)|1\rangle] \\ &= \frac{c_+ c_- \hbar\omega}{2} [(2\beta - 1)(1 - s)^2 + (1 + \gamma - \varepsilon_-)(1 - s) \\ &\quad + (1 + \gamma - \varepsilon_+)(1 - s) \\ &\quad + (2\beta - 1)(1 + \gamma - \varepsilon_-)(1 + \gamma - \varepsilon_+)]. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Substituindo o valor de ε_{\pm} e γ na equação acima, e utilizando a propriedade

$\beta^2 = \beta$, ficamos com

$$\left\langle E_+, s \left| \frac{dH}{ds} \right| E_-, s \right\rangle = \frac{c_+ c_- \hbar \omega}{2} [2(1 - 2\beta)(s - 1)]. \quad (2.98)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} c_+ c_- &= [(1 - s)^2 + (1 + \gamma - \epsilon_+)^2]^{-1/2} [(1 - s)^2 + (1 + \gamma - \epsilon_-)^2]^{-1/2} \\ &\quad 2^{-1/2} [(1 - 2s + 2s^2) - (2\beta - 1)\sqrt{1 - 2s + 2s^2}]^{-1/2} \\ &\quad \times 2^{-1/2} [(1 - 2s + 2s^2) + (2\beta - 1)\sqrt{1 - 2s + 2s^2}]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2(s - 1)\sqrt{1 - 2s + 2s^2}}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Substituindo (2.99) em (2.98), obtemos que

$$\left\langle E_+, s \left| \frac{dH}{ds} \right| E_-, s \right\rangle = \hbar \omega \left[\frac{(1/2 - \beta)}{\sqrt{1 - 2s + 2s^2}} \right]. \quad (2.100)$$

Como queremos o valor em módulo de (2.100) e β pode assumir somente os valores 0 e 1, vemos que

$$\left| \left\langle E_+, s \left| \frac{dH}{ds} \right| E_-, s \right\rangle \right| = \hbar \omega \frac{1}{\sqrt{1 - 2s + 2s^2}}. \quad (2.101)$$

Assim, a condição adiabática é dada por

$$T \gg \hbar \frac{\max_{0 \leq s \leq 1} \hbar \omega (1 - 2s + 2s^2)^{-1/2}}{\min_{0 \leq s \leq 1} (\hbar \omega \sqrt{1 - 2s + 2s^2})^2}, \quad (2.102)$$

que é satisfeita para $s = 1/2$. Desta forma, obtemos que

$$T \gg \frac{2}{\omega} \quad (2.103)$$

A expressão (2.103) fornece a condição para que a evolução do sistema seja adiabática. Sendo assim, no fim da evolução, se o estado do sistema estiver muito próximo a $|\Psi_T\rangle \approx |0\rangle$, concluímos que a função é constante, pois $\alpha \approx 1$ e $\beta \approx 0$. Analogamente, se $|\Psi_T\rangle \approx |1\rangle$, f será balanceada, pois $\alpha \approx 0$ e $\beta \approx 1$.

3 MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

O objetivo principal deste capítulo é fazer uma revisão sobre a mecânica quântica relativística que será posteriormente utilizada na implementação do algoritmo de Deutsch adiabático relativístico no capítulo 4. Todos os resultados apresentados neste capítulo estão baseados nas referências [50–54].

3.1 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Na mecânica quântica não-relativística, sabemos que partículas são descritas pela equação de Schrödinger. Podemos pensar que esta equação desempenha um papel análogo à segunda lei de Newton na mecânica clássica: dadas condições iniciais apropriadas, determinamos o comportamento de qualquer função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ para qualquer instante de tempo futuro, assim como a lei de Newton determina o comportamento da trajetória $\vec{r}(t)$ para qualquer instante de tempo futuro [40].

Uma maneira de derivar a equação de Schrödinger é através da correspondência com o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica não-relativística. O mapeamento é feito da seguinte forma:

→ sabemos que a relação energia-momento para uma partícula clássica, de momento \vec{p} e posição \vec{r} , é dada por

$$\frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{r}) = E, \quad (3.1)$$

→ aplicamos as regras

$$\begin{cases} \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}, \\ E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.2)$$

na equação (3.1), de modo que os operadores resultantes atuem na função de onda $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$;

→ obtemos a equação de Schrödinger

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla}) \cdot (-i\hbar\vec{\nabla}) + V(\vec{r}) \right] \Psi &= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ \implies i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= H\Psi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$ é o hamiltoniano de Schrödinger.

A equação (3.3) é invariante sob as transformações galileanas e descreve corretamente os fenômenos para partículas com velocidade muito menores que a velocidade da luz. Em contrapartida, não é invariante sob as transformações de Lorentz e a equação falha quando desejamos considerar os fenômenos relativísticos. Devido a este fato, uma nova equação para o caso relativístico foi proposta, a qual hoje conhecemos como equação de Klein-Gordon.

3.2 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A partir do mesmo raciocínio utilizado para se obter (3.3), partimos da relação energia-momento relativística da partícula livre

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2, \quad (\mu = 0, \dots, 3) \quad (3.4)$$

para se obter a equação de Klein-Gordon. Note que na equação (3.4), para facilitar as contas, estamos utilizando a notação de Einstein, onde os índices μ repetidos indicam uma somatória. Além disso, $p^\mu = \eta_{\mu\nu} p_\nu$, onde

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

é a métrica de Minkowski e $p_\mu = (E/c, \vec{p})$ é o quadrimomento da partícula. Vamos substituir o quadrimomento pelo operador quadrimomento em (3.4), $p^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu = i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$, e atuá-lo na função de onda da partícula Ψ . Dessa forma, a equação fica

$$\begin{aligned} (i\hbar\partial^\mu)(i\hbar\partial_\mu)\Psi &= (mc)^2\Psi \\ -\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\Psi &= (mc)^2\Psi \\ \left[\partial^\mu\partial_\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, m é a massa da partícula e c é a velocidade da luz no vácuo. A equação (3.6) é a equação de Klein-Gordon. Note que, diferentemente da equação (3.3), há uma derivada de segunda ordem tanto

temporal como espacial.

Apesar de sabermos que a equação relativística (3.6) obtida descreve muito bem a dinâmica de partículas sem *spin*, ela apresenta problemas peculiares que não corroboram com a mecânica quântica: i) densidade de probabilidade negativa e ii) energia negativa.

3.2.1 Densidade de probabilidade e energia negativas

Vamos agora construir a quadricorrente j_μ ($\mu = 0, \dots, 3$) de probabilidade associada à equação de Klein-Gordon e mostrar que a componente $j_0 = \rho$, que é interpretada como densidade de probabilidade, assume valores negativos.

Inicialmente, rearranjaremos a equação (3.6) e em seguida a multiplicamos por $i\Psi^*$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} i\Psi^* \left[\left(\frac{\hbar}{2m} \right) \partial^\mu \partial_\mu + \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \right) \right] \Psi \\ = \left(\frac{i\hbar}{2m} \right) \Psi^* \partial^\mu \partial_\mu \Psi + i \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \right) |\Psi|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tomando o complexo conjugado da expressão (3.6) e multiplicando por $i\Psi$, obtemos que

$$\begin{aligned} i\Psi \left[\left(\frac{\hbar}{2m} \right) \partial^\mu \partial_\mu + \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \right) \right] \Psi^* \\ = \left(\frac{i\hbar}{2m} \right) \Psi \partial^\mu \partial_\mu \Psi^* + i \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \right) |\Psi|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Subtraindo (3.8) de (3.7),

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\hbar}{2m} \right) \Psi^* \partial^\mu \partial_\mu \Psi + i \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \right) |\Psi|^2 \\ - \left[\left(\frac{i\hbar}{2m} \right) \Psi \partial^\mu \partial_\mu \Psi^* + i \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \right) |\Psi|^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\implies \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial^\mu \partial_\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \partial_\mu \Psi^*) = 0. \quad (3.10)$$

Pela regra de Leibniz, obtemos as seguintes relações

$$\Psi^* \partial^\mu (\partial_\mu \Psi) = \partial^\mu (\Psi^* \partial_\mu \Psi) - (\partial^\mu \Psi^*) (\partial_\mu \Psi), \quad (3.11a)$$

$$\Psi \partial^\mu (\partial_\mu \Psi^*) = \partial^\mu (\Psi \partial_\mu \Psi^*) - (\partial^\mu \Psi) (\partial_\mu \Psi^*), \quad (3.11b)$$

e, substituindo os resultados (3.11a) e (3.11b) em (3.10), ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{i\hbar}{2m} \{ \partial^\mu (\Psi^* \partial_\mu \Psi) - \cancel{(\partial^\mu \Psi^*) (\partial_\mu \Psi)} - [\partial^\mu (\Psi \partial_\mu \Psi^*) - \cancel{(\partial^\mu \Psi) (\partial_\mu \Psi^*)}] \}, \\ &= \partial^\mu \left[\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*) \right] \\ &\implies \partial^\mu j_\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analisando a equação (3.12) em componentes, vemos que quando $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \partial^0 j_0 &= \underbrace{\partial^0}_{=\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}} \left[\frac{i\hbar}{2m} (\underbrace{\Psi^*}_{=\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}} \underbrace{\partial_0 \Psi}_{=\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}} - \Psi \underbrace{\partial_0 \Psi^*}_{=\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right). \quad (3.14)$$

Quando $\mu = k$ ($k = 1, 2, 3$),

$$\partial^k j_k = \partial^k \left[\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial_k \Psi - \Psi \partial_k \Psi^*) \right] = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}, \quad (3.15)$$

tal que

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*). \quad (3.16)$$

A partir dos resultados (3.13) e (3.15), vemos que (3.12) é dada por

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) possui a forma de uma equação da continuidade.

Analisando a expressão (3.14), podemos notar que a dimensão de ρ é de densidade de probabilidade. Porém a mesma se mostra problemática no

sentido de que para um dado t , ambos Ψ e $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ possuem valores arbitrários. Portanto, ρ pode ser tanto positivo quanto negativo. Consequentemente a interpretação de que ρ é uma densidade de probabilidade deve ser abandonada.

Um bom exemplo que ilustra o problema da densidade de probabilidade é o caso da partícula livre com energia E e momento \vec{p} . Vamos supor que a solução de (3.6) é da forma

$$\Psi = N e^{\frac{-i}{\hbar} p^\mu x_\mu}, \quad (3.18)$$

onde N é uma constante de normalização e $p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{r}$. Substituindo a solução acima na equação de Klein-Gordon, vemos que

$$\begin{aligned} -\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} N e^{\frac{-i}{\hbar} p^\mu x_\mu} + \frac{p^2}{\hbar^2} N e^{\frac{-i}{\hbar} p^\mu x_\mu} + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) N e^{\frac{-i}{\hbar} p^\mu x_\mu} &= 0, \\ E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4, \\ \Rightarrow E &= \pm c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O resultado (3.19) mostra que há soluções possíveis tanto para partículas com energia positiva, que é o resultado esperado, quanto para partículas com energia negativa, que era um resultado inconsistente com a teoria física da época. Além disso, quando calculamos a densidade de probabilidade ρ , vemos que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[N^* e^{\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \left(-\frac{iEN}{\hbar} \right) e^{\frac{-i}{\hbar} p^\mu x_\mu} - N e^{\frac{-i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \left(\frac{iEN^*}{\hbar} \right) e^{\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \right] \\ &= \frac{E|N|^2}{mc^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De acordo com (3.19), a energia E pode assumir valores negativos, e consequentemente, acarreta em uma densidade de probabilidade ρ também negativa. Como veremos a seguir, foram estes os principais problemas que motivaram a busca por uma nova equação relativística, a qual hoje conhecemos como equação de Dirac.

3.3 EQUAÇÃO DE DIRAC

Como vimos na seção anterior, o fato da equação de Klein-Gordon estar associada a uma densidade de probabilidade que pode assumir valores negativos, fez com que os físicos da época a considerassem sem sentido.

Este problema levou P. A. Dirac a pensar sobre uma outra equação de onda relativística [53].

Um das origens da equação de Dirac está baseada em argumentos de simetria. Sabemos que as transformações de Lorentz unificam o tempo e o espaço em uma quantidade quadridimensional. Dessa forma, a equação quântica relativística deve refletir esta unicidade, implicando que deve haver uma completa simetria entre as partes temporais e espaciais desta equação. Dirac assumiu que, assim como a equação de Schrödinger, a nova equação seria linear na derivada temporal ($\partial/\partial t$) e, pela simetria, a linearidade deveria ser considerada também na derivada espacial, diferentemente da equação de Klein-Gordon. A estratégia de Dirac foi “fatorar” a relação de energia-momento relativística (3.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & (-p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2 c^2) \Psi \\ &= (-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) \times \\ & (p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde $p_0 = E/c$. Desta forma, a equação de onda ganha a seguinte forma

$$(-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) \Psi = 0. \quad (3.22)$$

Manipulando a equação (3.21), Dirac obteve as seguintes condições para que a igualdade acima seja satisfeita

$$\alpha_\mu^2 = 1 \quad (3.23a)$$

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0, \quad \mu \neq \nu \quad (3.23b)$$

onde $\mu, \nu = 1, \dots, 4$.

Supondo que os α 's sejam matrizes de dimensão 4×4 , para que obedecam as condições (3.23a) e (3.23b), estas devem ter a seguinte forma

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde σ_i , ($i = 1, 2, 3$) são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 .

Por fim, substituindo os resultados (3.24) na equação (3.22), obtemos

$$[-p_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc]\Psi = 0. \quad (3.26)$$

Como $p_0 \rightarrow \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}$, a equação (3.26) pode ser escrita da seguinte maneira

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (3.27)$$

onde

$$H = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc) \quad (3.28)$$

é o hamiltoniano de Dirac.

Note a semelhança da equação de Dirac (3.27) com a equação de Schrödinger (3.3). Em contrapartida, é importante ressaltar que Ψ não é simplesmente uma função de onda como no caso não-relativístico. Nesta equação, assim como os operadores que são matrizes, o estado do sistema efetivamente atua como uma “matriz” coluna com quatro elementos, chamado de spinor¹ de Dirac, e cada componente desta matriz é uma função de onda, ou seja,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Além disso, vale ressaltar também que devido ao fato da equação relativística ter a mesma estrutura matemática que a equação de Schrödinger e também pelo fato dos operadores $\vec{\alpha}$ e β serem hermitianos, a quantidade

$$\rho = \Psi^* \Psi = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2, \quad (3.30)$$

onde $\Psi^* = (\Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3 \ \Psi_4)$ é uma matriz linha, é positivamente definida e pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade.

3.3.1 Solução da equação de Dirac para a partícula em repouso

Como primeiro exemplo, vamos considerar uma partícula livre em repouso, ou seja, $\vec{p} = 0$. Além disso, vamos supor que Ψ seja independente do

¹ Ver referência [55].

momento linear da partícula. Dessa forma, a equação de Dirac fica

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = mc^2 \Psi(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Psi_A(t) \\ \Psi_B(t) \end{bmatrix} = -\frac{imc^2}{\hbar} \begin{bmatrix} \Psi_A(t) \\ \Psi_B(t) \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde

$$\Psi_A(t) = \begin{bmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_B(t) = \begin{bmatrix} \Psi_3(t) \\ \Psi_4(t) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

A partir de (3.31) obtemos quatro equações diferenciais a serem resolvidas

$$\frac{\partial \Psi_A(t)}{\partial t} = -i \frac{mc^2}{\hbar} \Psi_A(t), \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \Psi_B(t)}{\partial t} = i \frac{mc^2}{\hbar} \Psi_B(t), \quad (3.34)$$

cujas soluções são

$$\Psi_A(t) = \Psi_A(0) e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \quad \text{e} \quad \Psi_B(t) = \Psi_B(0) e^{i \frac{mc^2}{\hbar} t}. \quad (3.35)$$

Para uma partícula em repouso, sabemos que $E = mc^2$, então

$$\Psi_A(t) = \Psi_A(0) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}, \quad (3.36)$$

$$\Psi_B(t) = \Psi_B(0) e^{i \frac{E}{\hbar} t}. \quad (3.37)$$

Analisando as soluções obtidas, percebemos que Ψ_A é exatamente o tipo de solução que esperamos para o caso em que $\vec{p} = 0$. Por outro lado, Ψ_B representa o estado com energia negativa, ou seja, um estado de energia que até o momento não continha significância física.

Dirac, na época, tentou contornar o problema que surgiu com a solução Ψ_B postulando um “mar” infinito de partículas com energia negativa, o qual estava totalmente preenchido com estes estados indesejados². Atualmente, a interpretação é que estados como Ψ_B representam antipartículas com energia positiva [52]. Por exemplo, Ψ_A pode descrever elétrons, enquanto Ψ_B pósitrons, cada um sendo um spinor de duas componentes (o que está correto

²Poderíamos nos perguntar: por que simplesmente não assumimos que Ψ_B é sempre nulo, chamando as soluções com energia negativa de “fisicamente inaceitáveis” e as esquecemos? Infelizmente isso não é possível. Em um sistema físico quântico precisamos de um conjunto completo de estados, o que não acontece se considerarmos somente os estados cujas energias são positivas.

para partículas de spin $1/2$).

Em suma, a equação de Dirac para $\vec{p} = 0$ possui quatro soluções independentes. Ignorando os fatores de normalização, podemos escrevê-las da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Psi_2 &= e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_3 &= e^{i\frac{E}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Psi_4 &= e^{i\frac{E}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.38)$$

onde as soluções Ψ_1 e Ψ_2 descrevem partículas de spin $1/2$ e $-1/2$, respectivamente. Já as soluções Ψ_3 e Ψ_4 as antipartículas de spin $1/2$ e $-1/2$.

3.4 EQUAÇÃO DE DIRAC EM (1+1) DIMENSÕES

Vimos que Dirac obteve sua equação em (3+1) dimensões partindo da relação de energia-momento para a partícula livre. Queremos, entretanto, obter a forma da equação de Dirac quando restringimos a dimensão do sistema. Vamos supor que

$$\begin{cases} p_1 \neq 0, \\ p_2 = 0, \\ p_3 = 0. \end{cases}\quad (3.39)$$

Com estas considerações, a equação (3.21) pode ser reescrita da seguinte forma

$$(-p_0^2 + p_1^2 + m^2 c^2)\Psi = (-p_0 + \alpha p_1 + \beta mc)(p_0 + \alpha p_1 + \beta mc)\Psi = 0, \quad (3.40)$$

onde os coeficientes $\alpha = \alpha_1$ e β são desconhecidos. Vamos assumir que ambos sejam independentes de p_0 e p_1 . Assim,

$$\begin{aligned} & (-p_0^2 - p_0\alpha p_1 - p_0\beta mc + \alpha p_1 p_0 + \alpha^2 p_1^2 + \\ & \alpha p_1 \beta mc + \beta mc p_0 + \beta mc \alpha p_1 + \beta^2 m^2 c^2)\Psi = 0 \end{aligned}\quad (3.41)$$

$$[-p_0^2 + \alpha^2 p_1^2 + p_1 mc(\alpha\beta - \beta\alpha) + \beta^2 m^2 c^2]\Psi = 0. \quad (3.42)$$

Comparando (3.42) com (3.40), chegamos às seguintes relações

$$\alpha^2 = 1; \quad (3.43a)$$

$$\beta^2 = 1; \quad (3.43b)$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 0. \quad (3.43c)$$

Vamos supor que α e β sejam matrizes de dimensão d cujos autovalores são ± 1 . Desta forma,

$$\det(\alpha\beta) = \det(-\alpha\beta) = (-1)^d \det(\alpha\beta). \quad (3.44)$$

Concluimos que d deve assumir apenas valores pares. Para o caso considerado, $d = 2$, as matrizes de Pauli satisfazem todas as condições requeridas. É importante ressaltar ainda, que por estarmos restringindo a dimensão do sistema, Ψ é representado por uma matriz coluna com apenas duas componentes, ou seja,

$$\Psi(t, p) = \begin{bmatrix} \Psi_1(t, p) \\ \Psi_2(t, p) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Escolhendo $\alpha = \sigma_x$ e $\beta = \sigma_z$ e substituindo em (3.40), ficamos com

$$(-p_0 + \sigma_x p_1 + \sigma_z mc)(p_0 + \sigma_x p_1 + \sigma_z mc)\Psi = 0, \quad (3.46)$$

e a equação de onda é dada por

$$(-p_0 + \sigma_x p_1 + \sigma_z mc)\Psi = 0. \quad (3.47)$$

Reescrevendo $p_0 = \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ e $p_1 = p_x = \hat{p}$, obtemos a equação de Dirac em (1+1) dimensão

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (3.48)$$

onde o hamiltoniano tem a forma

$$H = c\hat{p}\sigma_x + mc^2\sigma_z. \quad (3.49)$$

3.4.1 Partícula Interagindo com o Campo Eletromagnético

Nesta seção encontraremos os autoestados e autoenergias instantâneos do hamiltoniano de Dirac em (1+1) dimensão para uma partícula carregada interagindo com um campo eletromagnético. Isto será importante posteriormente para a implementação do algoritmo de Deutsch.

AUTOESTADOS E AUTOENERGIAS

Quando há interação com o campo eletromagnético, a equação (3.49) assume a forma

$$H(t) = c\sigma_x[\hat{p} - qA(t)] + \sigma_z mc^2 + q\phi(t). \quad (3.50)$$

Este hamiltoniano é obtido a partir do que chamamos de acoplamento mínimo, ou seja, trocando $p_0 \rightarrow p_0 - q\phi(t)$ e $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - qA(t)$, onde $A(t)$ e $\phi(t)$ são a componente x do potencial vetor e o potencial escalar, respectivamente, e q é a carga da partícula.

Os autoestados e autovalores de energia instantâneos do hamiltoniano (3.50) são calculados através da equação

$$H(t) |n, p\rangle = E_n(t) |n, p\rangle. \quad (3.51)$$

Observe que o estado do sistema é composto por dois graus de liberdade. Atuando $H(t)$ apenas no espaço dos momentos, de modo que $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, obtemos

$$H(t) |n, p\rangle = \{c[p - qA(t)]\sigma_x + mc^2\sigma_z + q\phi(t)\} |n, p\rangle \quad (3.52)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} mc^2 + q\phi - \lambda & c(p - qA) \\ c(p - qA) & -mc^2 + q\phi - \lambda \end{bmatrix} \\ = (q\phi + mc^2 - \lambda)(q\phi - mc^2 - \lambda) - c^2(p - qA)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\implies \lambda^2 - 2q\phi\lambda + (q\phi)^2 - (mc^2)^2 - c^2(p - qA)^2 = 0 \quad (3.54)$$

Resolvendo a equação característica acima, os autovalores de energia são

$$E_{\pm} = q\phi \pm \sqrt{(mc^2)^2 + c^2(p - qA)^2}, \quad (3.55)$$

e consequentemente, os autoestados instantâneos ficam

$$|E_+, t\rangle = N_+ \begin{bmatrix} E_+ + mc^2 - q\phi(t) \\ cp - cqA(t) \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$|E_-, t\rangle = N_+ \begin{bmatrix} cp - cqA(t) \\ -E_+ - mc^2 + q\phi(t) \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\text{onde } N_+ = \frac{1}{\sqrt{[E_+ + mc^2 - q\phi(t)]^2 + c^2[p - qA(t)]^2}}.$$

4 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os resultados referentes à implementação do algoritmo de Deutsch relativístico no contexto da computação quântica adiabática.

4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DEUTSCH RELATIVÍSTICO

Podemos nos referir aos computadores, em primeira instância, como sistemas físicos. Sendo assim, as leis físicas estabelecem a operatividade desses dispositivos. A velocidade com que um dispositivo físico processa informação, por exemplo, é limitada pela sua energia e a quantidade de informação que pode ser processada pelo número de graus de liberdade. Estes limites físicos fundamentais são herdados de teorias como a termodinâmica, a relatividade e mecânica quântica e são caracterizados por importantes constantes físicas, tais como a constante de Boltzmann k_B , a velocidade da luz c e a constante de Planck \hbar [56].

A medida que os computadores tornam-se mais velozes e menores, novas tecnologias substituem ou suplementam o que já existe, ou seja, teorias físicas que antes não eram necessárias aparecem para alavancar o desenvolvimento da computação. Na escala de tamanhos perceptíveis pelo ser humano e acima dela, por exemplo, a física clássica descreveu e ainda descreve muito bem os fenômenos físicos envolvidos nos dispositivos. Ao passo que evoluímos tecnologicamente, imergimos na escala atômica; precisamos então, da física quântica para entender e estabelecer a operatividade dos equipamentos. Em termos práticos, a física quântica inova com processadores extremamente rápidos e pequenos; suporta um novo modo de computação com algoritmos quânticos mais sofisticados que não possuem análogos clássicos [57].

Pensando em computação quântica, propomos a ideia de implementar o algoritmo de Deutsch adiabático através da relatividade especial. Para isto, substituímos a equação de Schrödinger pela equação de Dirac. Por hora, a versão relativística do algoritmo é um simples modelo, uma vez que trabalhamos com um sistema em $(1+1)$ dimensão devido a complexidade matemática do problema em $(3+1)$ dimensões.

Para implementar a versão relativística do algoritmo de Deutsch procederemos de maneira muito parecida com a apresentada no capítulo 2 para o caso não-relativístico. Primeiramente, consideramos que em $t = 0$ o sistema

seja descrito pelo hamiltoniano para a partícula livre de Dirac. Da expressão (3.49), sabemos que

$$H(0) = c\hat{p}\sigma_x + mc^2\sigma_z. \quad (4.1)$$

No final da evolução, quando $t = T$, supomos que o sistema evoluiu para uma interação da partícula com um campo eletromagnético externo, que é determinado pelo potencial vetor $A(t)$. O hamiltoniano para este sistema, de acordo com (3.50), possui a forma

$$H(T) = c[\hat{p} - qA(T)]\sigma_x + mc^2\sigma_z. \quad (4.2)$$

Relembre que o sistema que estamos trabalhando é composto e que nos hamiltonianos acima, p e σ são operadores que atuam em espaços vetoriais distintos.

Calculamos no capítulo 3, seção 3.4.1, os autoestados e autovalores instantâneos de energia de ambos hamiltonianos $H(0)$ e $H(T)$. Matematicamente, estão apresentados nas equações (3.56) e (3.57).

O próximo passo é a implementação do algoritmo de Deutsch. Vamos supor, então, que o nosso sistema esteja inicialmente no autoestado instantâneo de energia positiva $H(0)$, com momento linear p_i

$$|E_+\rangle = N_+ \left[\frac{E_+ + mc^2}{cp_i} \right] \otimes |p_i\rangle, \quad (4.3)$$

onde $E_+ = [m^2c^4 + c^2p_i^2]^{1/2}$ e $N_+ = [(E_+ + mc^2)^2 + c^2p_i^2]^{-1/2}$. Além disso, supomos também que a evolução procederá adiabaticamente até o autoestado instantâneo de energia positiva de $H(T)$:

$$|\varepsilon_+\rangle = \eta_+ \left[\frac{\varepsilon_+ + mc^2}{cp_i - cqA(T)} \right] \otimes |p_i\rangle, \quad (4.4)$$

$\varepsilon_+ = [m^2c^4 + c^2(p_i - qA(T))^2]^{1/2}$ e $\eta_+ = [(\varepsilon_+ + mc^2)^2 + c^2(p_i - qA(T))^2]^{-1/2}$. Note que o momento linear da partícula não muda durante a evolução, pois é uma consequência da dinâmica.

Com as informações acima, codificaremos o algoritmo de Deutsch através do parâmetro externo do sistema $A(t)$. Definimos

$$A(T) := \frac{A_0}{2} |(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}| + \frac{p_i}{q} \quad (4.5a)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_+ := \sqrt{m^2c^4 + \frac{c^2q^2A_0^2}{4} [(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}]^2}, \quad (4.5b)$$

tal que $A_0 = \frac{mc}{q}$. Assim, os estados considerados como inicial (4.3) e final (4.4) no algoritmo ganham as formas

$$|E_+\rangle = N_+ \begin{bmatrix} E_+ + mc^2 \\ cp_i \end{bmatrix} \otimes |p_i\rangle, \quad (4.6)$$

$$|\varepsilon_+\rangle = \eta_+ \begin{bmatrix} \varepsilon_+ + mc^2 \\ \frac{mc^2}{2} |(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}| \end{bmatrix} \otimes |p_i\rangle, \quad (4.7)$$

onde

$$E_+ = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_i^2}, \quad (4.8a)$$

$$N_+ = [(E_+ + mc^2)^2 + c^2 p_i^2]^{-1/2}, \quad (4.8b)$$

$$\varepsilon_+ = mc^2 \sqrt{1 + \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2}{4}}, \quad (4.8c)$$

$$\eta_+ = (mc^2)^{-1} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2}{4}} + 1 \right)^2 + \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2}{4} \right]^{-1/2}. \quad (4.8d)$$

Como podemos ver, desde que o momento linear da partícula esteja fixo na evolução, o estado final do sistema depende apenas se a função é constante ou balanceada. Sendo assim, temos as seguintes situações:

i) se a função f for constante,

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) = f(1) = 1,$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_+\rangle_{\text{const}} = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes |p_i\rangle; \quad (4.9)$$

ii) se a função f for balanceada,

$$f(0) = 0 \text{ e } f(1) = 1 \quad \text{ou} \quad f(0) = 1 \text{ e } f(1) = 0,$$

$$\Rightarrow |\epsilon_+\rangle_{\text{bal}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |p_i\rangle. \quad (4.10)$$

Desta forma, realizando-se medidas projetivas no estado final do sistema, determina-se a classe da função. Se a probabilidade de medir o sistema no estado $|1\rangle$ for $|\langle 1|\epsilon_+\rangle|^2 \neq 0$, a função é constante com certeza, porém, se $|\langle 1|\epsilon_+\rangle|^2 = 0$ a função pode ser tanto constante quanto balanceada e precisamos de mais medidas para obter o resultado.

A figura 11 apresenta um fluxograma de como devemos proceder no processo de medida.

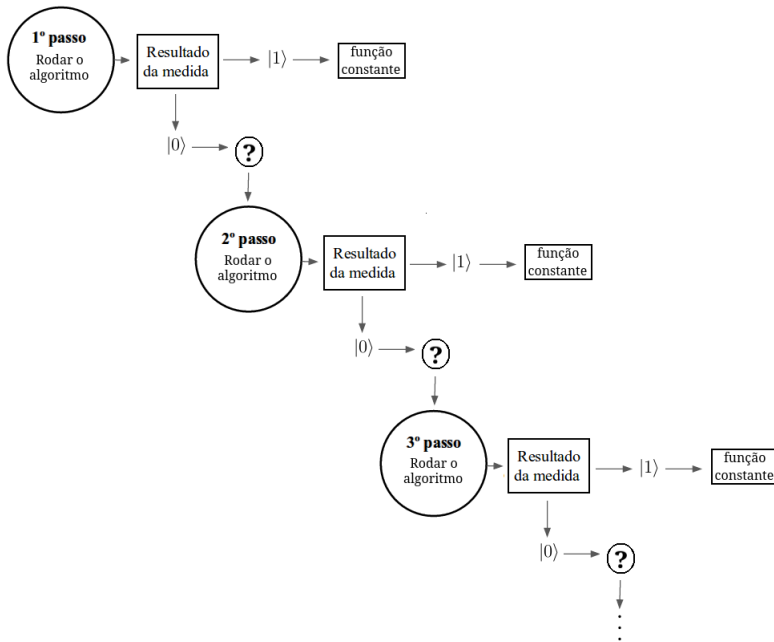


Figura 11: Fluxograma indicando a implementação do algoritmo de Deutsch relativístico.

1º passo: preparamos o estado inicial e rodamos o algoritmo. Se o resultado da medida for o estado $|1\rangle$, então com certeza a função é constante, ou seja, encontraremos o resultado da computação com apenas uma medida. Isto implica que, nesta situação, o algoritmo é mais eficiente em números de medidas do que o clássico.

2º passo: se o resultado da primeira medida for $|0\rangle$, não sabemos com certeza a resposta. Preparamos novamente o estado inicial e rodamos o algoritmo. Se o resultado da medida for $|1\rangle$, então com certeza a função é constante e não precisamos de mais medidas. Isto implica que o algoritmo possui a mesma eficiência que o clássico em números de medidas.

3º passo: se o resultado da segunda medida for $|0\rangle$, repetimos todo o procedimento novamente, pois não sabemos com certeza a resposta. Isto implica que, nesta situação, o algoritmo é menos eficiente em números de medidas que o clássico. Caso não tenhamos condições de discernir a resposta do problema, repetimos todo o procedimento quantas vezes forem necessárias até chegarmos à resposta do problema.

Perceba na análise acima que descobrir se função é constante ou balanceada com certeza rodando o algoritmo duas ou mais vezes é melhor no caso clássico, pois neste último o algoritmo precisa de apenas duas medidas, uma vez que o input $x = \{0, 1\}$ é controlável. No caso quântico, o input não é controlável, pois as funções $f(0)$ e $f(1)$ são calculadas simultaneamente a partir de um estado inicial do sistema. Portanto, no caso quântico relativístico, temos uma chance, embora pequena, de resolver o problema de maneira mais eficiente que no caso clássico.

Tal situação ocorre quando medimos o estado $|1\rangle$ como resultado da computação. Dado que temos igual probabilidade da função ser constante ou balanceada, o estado imediatamente antes da medida é dado por

$$\rho = \frac{1}{2}(|\varepsilon_+\rangle\langle\varepsilon_+|)_{\text{const}} + \frac{1}{2}(|\varepsilon_+\rangle\langle\varepsilon_+|)_{\text{bal}}. \quad (4.11)$$

Assim, a probabilidade de medir o estado $|1\rangle$ é

$$p_1 = \text{Tr}(|1\rangle\langle 1|\rho) = \frac{1}{2}|\langle 1|\varepsilon_+\rangle_{\text{const}}|^2 = \frac{1}{4(2+\sqrt{2})} \simeq 7,3\%, \quad (4.12)$$

enquanto que a probabilidade de medir o estado $|0\rangle$ é

$$\begin{aligned} p_i &= \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|\rho) = \frac{1}{2} [|\langle 0|\varepsilon_+\rangle_{\text{const}}|^2 + |\langle 0|\varepsilon_+\rangle_{\text{bal}}|^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \right] \simeq 92,7\%. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Admitindo que o resultado da primeira medida tenha sido $|0\rangle$, podemos nos perguntar: “Qual a chance de acertar a classe da função supondo que ela seja balanceada?” Definindo,

$$p_i^{\text{const}} = |\langle 0|\varepsilon_+\rangle_{\text{const}}|^2 \quad (4.14)$$

e

$$p_i^{\text{bal}} = |\langle 0|\varepsilon_+\rangle_{\text{bal}}|^2, \quad (4.15)$$

a probabilidade da função ser balanceada é

$$p^{\text{bal}} = \frac{p_i^{\text{bal}}}{p_i^{\text{bal}} + p_i^{\text{const}}} = \frac{1}{1 + \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} = 54\%, \quad (4.16)$$

enquanto que a probabilidade da função ser constante é

$$p^{\text{const}} = \frac{p_i^{\text{const}}}{p_i^{\text{bal}} + p_i^{\text{const}}} = \frac{\frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}{\frac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} = 46\%. \quad (4.17)$$

Portanto, no caso quântico relativístico temos 4% a mais de chance de chutar que a função será balanceada e acertar do que no caso clássico.

Em suma, vemos que apesar do nosso algoritmo relativístico ser probabilístico, há uma pequena chance de resolver o problema corretamente em apenas uma medida. Para duas medidas ou mais, o algoritmo clássico é melhor. Porém, quando comparamos com o algoritmo de Deutsch implementado via computação quântica adiabática na referência [49], cuja resposta é obtida com certeza em apenas uma medida, certamente o nosso algoritmo possui pior desempenho. A seguir analisaremos o tempo de interpolação do algoritmo no caso relativístico.

4.1.1 Interpolação do Hamiltoniano

No capítulo 2, seção 2.3.1.2, vimos que a proposta da implementação do algoritmo de Deutsch via computação quântica adiabática [49] considera que o sistema quântico evolui através de um hamiltoniano dependente do tempo caracterizado por uma interpolação linear entre os hamiltonianos $H(0)$ e $H(T)$. Nem sempre este tipo de interpolação é o melhor a ser utilizado [43]. Contudo, devido a possibilidade da existência de um sistema físico onde a dinâmica da partícula é implementada através de campos elétricos clássicos, torna a proposta mais realista [59]. Com isso, a partir da equação (2.73), o hamiltoniano que governa a evolução do nosso sistema é dado por

$$\begin{aligned}
 H(s) &= (1-s)H(0) + sH(T) \\
 &= (1-s)c(\sigma_x p + \sigma_z mc) + s[c\sigma_x p - c\sigma_x qA(T) + \sigma_z mc^2] \\
 &= cp\sigma_x + mc^2\sigma_z - \cancel{scp\sigma_x} - \cancel{smc^2\sigma_z} + \cancel{scp\sigma_x} - scqA\sigma_x + smc^2\sigma_z \\
 &= c[p - sqA(T)]\sigma_x + mc^2\sigma_z.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

A partir do hamiltoniano encontrado em (4.18) e da condição (2.26) encontraremos a premissa para que a evolução seja adiabática.

4.1.2 Condição Adiabática

Vimos que o teorema adiabático é o alicerce para o modelo de computação quântica adiabática. Como demonstra D. Aharonov et al. em seu artigo [14], é através deste teorema que obtemos a condição para que o parâmetro externo, que controla a evolução do sistema, garanta a adiabaticidade e determine a eficiência do algoritmo.

No capítulo 2, seção 2.1.4, rearranjamos a condição adiabática em termos do tempo total de computação. Encontramos que o mesmo é determinado principalmente pelo *gap* espectral mínimo do hamiltoniano $H(t)$. A referência [58] fortalece esta afirmação. Nela consta que a diferença de energia desempenha um papel importante na computação quântica adiabática e que a validade de um algoritmo deste tipo, i. e., *a existência de um tempo de computação finito T , depende completamente de um gap diferente de zero durante toda evolução*. Isto significa que, se houver cruzamento dos níveis de energia, o sistema quântico falhará ao tentar se manter no estado fundamental instantâneo de $H(t)$ e a computação será ineficiente.

Com base nisto, primeiramente vamos analisar o que ocorre com o *gap*

quando estamos considerando um sistema relativístico. Como consequência, veremos o que ocorre com o tempo de computação do sistema e qual a condição para que parâmetro externo de controle mantenha a adiabaticidade durante a evolução.

Cálculo do *gap*:

O hamiltoniano da equação (4.18) é do tipo apresentado na expressão (3.50), com $A(s) = sA(T)$ e $\phi(s) = 0$. Substituindo estes valores nas expressões (3.55), (3.56) e (3.57), obtemos que os autovalores de energia de $H(s)$ são dados por

$$\begin{aligned} E_{\pm}(s) &= \pm \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 [p_i - qA(T)s]^2} \\ &= \pm \sqrt{\Gamma^2 + \Theta(s)^2}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $\Gamma = mc^2$ e $\Theta(s) = c[p_i - qA(T)s]^1$. A partir de agora, por simplificação, subentende-se $\Theta = \Theta(s)$, $E_{\pm} = E_{\pm}(s)$ e $A = A(T)$.

Os autoestados instantâneos do hamiltoniano (4.18) ficam com a seguinte forma

$$|E_{-}, s\rangle = N_{-} \begin{bmatrix} \Theta \\ E_{-} - \Gamma \end{bmatrix} \otimes |p_i\rangle, \quad N_{-} = \frac{1}{\sqrt{(E_{-} - \Gamma)^2 + \Theta^2}}, \quad (4.20)$$

$$|E_{+}, s\rangle = N_{+} \begin{bmatrix} E_{+} + \Gamma \\ \Theta \end{bmatrix} \otimes |p_i\rangle, \quad N_{+} = \frac{1}{\sqrt{(E_{+} + \Gamma)^2 + \Theta^2}}. \quad (4.21)$$

Utilizando os resultados de (4.19), obtemos que o *gap* instantâneo de energia entre os autoestados $|E_{+}, s\rangle$ e $|E_{-}, s\rangle$ é dado por:

$$\begin{aligned} g_{+-}(s) &= E_{+}(s) - E_{-}(s) \\ &= 2\sqrt{\Gamma^2 + \Theta^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Com o resultado obtido acima, podemos calcular o termo \mathcal{G} da condição para

¹Embora nas equações (4.19), (4.20) e (4.21) o autovalor do operador momento linear \hat{p} possa ser qualquer $p \in [-\infty, \infty]$, utilizamos a notação p_i , que é o autovalor que caracteriza o estado inicial $|p_i\rangle$, que será sempre assumido desta forma para este grau de liberdade.

o tempo total de computação para este sistema:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \min_{0 \leq s \leq 1} |g_{+-}(s)| \\ &= \min_{0 \leq s \leq 1} \left| 2\sqrt{m^2 c^4 + c^2(p_i - qAs)^2} \right|.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Condição para o tempo de computação

Nos resta ainda calcular o termo \mathcal{F} para completarmos a análise para o tempo total de computação. Para isto, inicialmente avaliaremos a expressão $\left\langle E_-, s \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| E_+, s \right\rangle$. De (4.18), temos que a derivada do hamiltoniano em relação a s é dada por

$$\frac{dH}{ds} = -cqA\sigma_x. \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left\langle E_-, s \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| E_+, s \right\rangle &= N_- [\langle p, 0 | \Theta + \langle p, 1 | (E_- - \Gamma)] \\ &\quad \times (-cqA\sigma_x) N_+ [(E_+ + \Gamma) | 0, p \rangle + \Theta | 1, p \rangle] \\ &= -N_- N_+ cqA [\langle p, 0 | \Theta + \langle p, 1 | (E_- - \Gamma)] \\ &\quad \times [(E_+ + \Gamma) | 1, p \rangle + \Theta | 0, p \rangle] \\ &= -N_- N_+ cqA \left[\Theta^2 + (E_+ + \Gamma) (\widehat{E_-}^{-E_+} - \Gamma) \right] \\ &= -N_- N_+ cqA [\Theta^2 - (E_+ + \Gamma)^2].\end{aligned}\quad (4.25)$$

Como o produto

$$\begin{aligned}N_+ N_- &= [(E_+ + \Gamma)^2 + \Theta^2]^{-1/2} \left[(\widehat{E_-}^{-E_+} - \Gamma)^2 + \Theta^2 \right]^{-1/2} \\ &= [\Theta^2 + (E_+ + \Gamma)^2]^{-1},\end{aligned}\quad (4.26)$$

a expressão (4.25) fica

$$\left\langle E_-, s \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| E_+, s \right\rangle = -cqA \left[\frac{(E_+ + \Gamma)^2 - \Theta^2}{(E_+ + \Gamma)^2 + \Theta^2} \right]. \quad (4.27)$$

Por fim, o termo que faltava para o cálculo do tempo total de computação é

dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \hbar \max_{0 \leq s \leq 1} \left| -cqA \left[\frac{(E_+ + \Gamma)^2 - \Theta^2}{(E_+ + \Gamma)^2 + \Theta^2} \right] \right| \\ &= \hbar \max_{0 \leq s \leq 1} \left| cqA \frac{\left[mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + c^2(p_i - qAs)^2} \right]^2 - c^2(p_i - qAs)^2}{\left[mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + c^2(p_i - qAs)^2} \right]^2 + c^2(p_i - qAs)^2} \right|. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo os resultados (4.23) e (4.28) na expressão que nos fornece a condição para o o tempo de computação, obtemos que

$$T \gg \frac{\hbar \max_{0 \leq s \leq 1} \left| cqA \frac{\left[mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + c^2(p_i - qAs)^2} \right]^2 - c^2(p_i - qAs)^2}{\left[mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + c^2(p_i - qAs)^2} \right]^2 + c^2(p_i - qAs)^2} \right|}{\left[\min_{0 \leq s \leq 1} \left| 2\sqrt{m^2 c^4 + c^2(p_i - qAs)^2} \right| \right]^2}. \quad (4.29)$$

Note que efetivamente o tempo de computação não depende do tipo de partícula (pósitron ou elétron) que estamos considerando. Se substituirmos o valor de A dado em (4.5a), restará apenas a dependência com o momento linear p_i desta partícula e também se a função f no algoritmo de Deutsch é constante ou balanceada (a dependência com a carga desaparece). Precisamos, agora, analisar com mais cuidado e com interesse prático os valores de $\mathcal{G}(s)$ e $\mathcal{F}(s)$ e, consequentemente, analisar o valor para o tempo total da computação. Basicamente, devemos calcular separadamente os valores extremos indicados na condição (4.29) para estas funções.

Como sistema físico vamos considerar o elétron de massa $m = m_e$ e carga $q = -e$ e analisar o que ocorre com o tempo de computação nas seguintes três situações possíveis para o seu momento linear, $p_i < 0$, $p_i = 0$ e $p_i > 0$.

Analisando o numerador na expressão (4.29),

$$\hbar \max_{0 \leq s \leq 1} \left| -ceA \frac{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eAs)^2} \right]^2 - c^2(p_i + eAs)^2}{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eAs)^2} \right]^2 + c^2(p_i + eAs)^2} \right| \quad (4.30)$$

e sabendo que todas as constantes são positivas, com exceção do momento linear, vemos que o valor máximo será obtido quando o termo $c^2(p_i + eAs)^2$ for mínimo. O mesmo ocorre para valor mínimo no denominador de (4.29),

$$\left[\min_{0 \leq s \leq 1} \left| 2\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eAs)^2} \right| \right]^2. \quad (4.31)$$

Substituindo o valor de A , dado na equação (4.5a), no termo $c^2(p_i + eAs)^2$, ficamos com a seguinte condição a ser analisada

$$p_i + eAs = p_i - \left[\frac{m_e c}{2} |(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}| + p_i \right] s. \quad (4.32)$$

Sendo assim,

i) $p_i < 0$

→ Quando a função f for constante,

$$p_i + eAs = p_i - (m_e c + p_i) s. \quad (4.33)$$

Como $m_e c + p_i > 0$, s deve ser nulo e o tempo total da computação fica com a seguinte condição

$$T \gg \frac{\hbar c(m_e c + p_i) \frac{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2 - c^2 p_i^2}{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2 + c^2 p_i^2}}{\left[2\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2}. \quad (4.34)$$

Note que substituímos o valor de $A = -\frac{m_e c + p_i}{e}$ na expressão (4.29) para encontrar a condição acima.

→ Quando a função f for balanceada,

$$p_i + eAs = p_i - p_i s. \quad (4.35)$$

Para que a condição acima assuma seu valor mínimo, $s = 1$ e o tempo total da computação será dado por

$$T \gg \frac{\hbar |p_i|}{4m_e^2 c^3}. \quad (4.36)$$

Na expressão (4.29) substituímos o valor de $A = -\frac{p_i}{e}$.

Para o caso particular em que $p_i = -0.99m_e c$, por exemplo, a condição para o tempo de computação será $T \gg 1,15 \times 10^{-24}$ s quando f é constante e $T \gg 3,18 \times 10^{-22}$ s quando f for balanceada. Vemos que há uma diferença de duas ordens de grandeza entre os dois casos, sendo que no caso constante a condição para o tempo total de computação garante a adiabaticidade mais rapidamente do que no caso onde f é balanceada.

ii) $p_i = 0$

Neste caso específico, vemos na expressão (4.32) que $s = 0$ minimiza a quantidade $p_i + eAs$ para qualquer valor de A .

→ Quando a função f for constante, o valor de $A = -\frac{m_e c}{e}$ e a condição para o tempo de computação fica

$$T \gg \frac{\hbar}{4mc^2} = 3,22 \times 10^{-22} \text{ s.} \quad (4.37)$$

→ Quando a função f for balanceada, o potencial vetor também se anula neste caso e, por conta disto, o tempo total da computação fica com a condição

$$T \gg 0. \quad (4.38)$$

Vemos, neste caso, que também há uma diferença no tempo de computação dependendo do resultado da função f . Além disso, diferentemente do que ocorre quando f é constante, a condição (4.38) indica que a adiabaticidade é sempre satisfeita nestas condições, ou seja, não há transições no sistema durante a evolução.

iii) $p > 0$

O único valor capaz de minimizar a função $p_i + eAs$, independentemente se f for constante ou balanceada é $s = 0$.

→ No caso em que f é constante $A = -\frac{(m_e c + p_i)}{e}$, e o tempo total da computação fica com a seguinte condição

$$T \gg \frac{\hbar c(m_e c + p_i) \frac{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2 - c^2 p_i^2}{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2 + c^2 p_i^2}}{\left[2\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2}. \quad (4.39)$$

→ Quando a função f for balanceada, $A = -\frac{p_i}{e}$. A condição para o tempo total de computação fica

$$T \gg \frac{\hbar c p_i \frac{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2 - c^2 p_i^2}{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2 + c^2 p_i^2}}{\left[2\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_i^2} \right]^2}. \quad (4.40)$$

Supondo que $p_i = 0,99m_e c$, $T \gg 2,3 \times 10^{-22}$ s quando a função for constante e $T \gg 1,15 \times 10^{-22}$ s quando for balanceada. Note que, diferentemente dos casos anteriores, não houve mudanças significativas na condição para o tempo total de computação devido à classe da função. Ambos valores ficaram muito próximos.

COMPARAÇÃO ENTRE OS TRÊS CASOS:

→ Vemos que há uma diferença na condição para o tempo de computação a medida que fixamos um valor de momento linear para a partícula. Entretanto, como não conhecemos o resultado da computação de antemão, ou seja, não sabemos se a função f é constante ou balanceada, devemos esperar o maior tempo de computação possível, que neste caso pode ser aproximado por

$$T \gtrsim 10^{-20} \text{ s}. \quad (4.41)$$

Observando o tempo total de computação isoladamente, não podemos afirmar nada a respeito da eficiência da computação quântica relativística, ele é simplesmente um valor numérico que encontramos. Para sabermos se há vantagem em considerar a relatividade restrita no algoritmo de Deutsch

que implementamos precisamos de uma comparação. Isto será realizado na próxima seção através da análise do limite não-relativístico deste mesmo algoritmo. A seguir, analisaremos a intensidade do campo elétrico aplicado sobre o sistema.

Condição para o campo elétrico

Uma outra maneira de garantir a adiabaticidade do sistema é através do parâmetro externo ao sistema que temos controle, que nesse caso é o potencial vetor $A(s)$. De acordo com a equação (4.18), $A(s) = As$, de modo que em $s = 1$

$$A := E_0 T. \quad (4.42)$$

E_0 é o campo elétrico aplicado, o qual estamos assumindo $E_0 \geq 0$. Substituindo (4.42) na condição obtida para o tempo de computação (4.29) e sabendo que $t = sT$, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \gg & \frac{\hbar \max_{0 \leq t \leq T} \left| -ceE_0 \mathcal{F} \frac{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right]^2 - c^2(p_i + eE_0 t)^2}{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right]^2 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right|}{\left[\min_{0 \leq t \leq T} \left| 2\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right| \right]^2}, \\ & \hbar \max_{0 \leq t \leq T} \left| -ceE_0 \frac{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right]^2 - c^2(p_i + eE_0 t)^2}{\left[m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right]^2 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right| \\ & \ll \left[\min_{0 \leq t \leq T} \left| 2\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_i + eE_0 t)^2} \right| \right]^2, \\ & \mathcal{F} \ll \mathcal{G}^2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

que é a própria condição adiabática obtida na seção 2.1 do capítulo 2.

A mesma análise que fizemos para o tempo de computação (4.29), podemos realizar para obter a condição para o campo elétrico. Vemos na expressão (4.43) que os valores extremos serão obtidos quando o termo $c^2(p_i + eE_0 t)^2$ for mínimo. Vamos considerar três condições para o momento linear:

i) $p_i < 0 \longrightarrow \mathcal{F}(t)$ e $\mathcal{G}(t)$ atingem seus valores extremos quando o termo

$$p + eE_0t = 0.$$

$$\implies \hbar ceE_0 \ll 4m_e^2c^4 \quad \text{ou} \quad E_0 \ll \frac{4m_e^2c^3}{\hbar e}. \quad (4.44)$$

Substituindo os valores das constantes no SI, a condição acima fica

$$E_0 \ll 0,53 \times 10^{19} \text{ V/m}. \quad (4.45)$$

ii) $p_i = 0 \longrightarrow \mathcal{F}(t)$ e $\mathcal{G}(t)$ atingem seus valores extremos quando o tempo $t = 0$. Com isso, o termo $p + eE_0t$ se anula novamente e a condição para o campo elétrico fica idêntica ao caso anterior dada na expressão (4.44).

iii) $p_i > 0 \longrightarrow \mathcal{F}(t)$ e $\mathcal{G}(t)$ atingem seus valores extremos quando o tempo $t = 0$.

$$\hbar ceE_0 \frac{\left(m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2}\right)^2 - c^2 p^2}{\left(m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2}\right)^2 + c^2 p^2} \ll 4(m_e^2 c^4 + c^2 p^2)^2,$$

$$E_0 \ll \frac{4(m_e^2 c^4 + c^2 p^2)^2 \left[\left(m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2}\right)^2 + c^2 p^2 \right]}{\hbar ce \left[\left(m_e c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2}\right)^2 - c^2 p^2 \right]}. \quad (4.46)$$

Supondo que $p = m_e c$, correspondente ao máximo valor de momento que o elétron “pode assumir”, numericamente a condição acima se torna

$$E_0 \ll 1,5 \times 10^{19} \text{ V/m}. \quad (4.47)$$

Comparando os valores obtidos em todos os casos, vemos que a condição obtida em (4.45) engloba a condição (4.47). Portanto, tomaremos este valor como a condição global para o campo elétrico capaz de garantir a adiabaticidade do sistema. Este valor corrobora com a referência [59] que afirma que quando lidamos com campos elétricos da ordem de $E_0 \geq 10^{18}$ há uma apreciável probabilidade de se produzir pares elétron-pósitron a partir do decaimento do vácuo. Para que não haja criação de novos estados em nosso sistema e muito menos transições entre estes estados, precisamos que o campo elétrico obedeça a condição (4.45),

$$E_0 \ll 10^{18} \text{ V/m}. \quad (4.48)$$

4.1.3 Limite não-relativístico

Queremos compreender o limite não-relativístico do algoritmo implementado na seção 4.1. Neste trabalho chegaremos ao limite não-relativístico da equação de Dirac através do método proposto por L. Foldy e S. Wouthuysen [60], o qual será descrito a seguir.

4.1.3.1 Transformação FW

A transformação de Foldy e Wouthuysen, ou transformação FW, é normalmente descrita como um truque matemático que nos permite analisar o limite não relativístico da teoria de Dirac. Porém, como será visto, a representação do hamiltoniano transformado através deste método é a única que nos permite fazer esse limite em termos de partículas e antipartículas. Na presente seção, mostraremos como é feita a transformação FW no hamiltoniano de Dirac em (3+1) dimensões nos baseando no artigo original apresentado por L. L. Foldy e S. A. Wouthuysen em 1950 [60] e na referência [61].

No capítulo 3, estudamos os aspectos da mecânica quântica não relativística. O método convencional utilizado nesta teoria quando queremos encontrar uma descrição para o limite não relativístico considera que o momento da partícula é muito pequeno quando comparado com sua massa vezes a velocidade da luz. Isto faz com que duas das quatro componentes do espinor de Dirac se tornem pequenas quando o momento é pequeno. Assim, é possível resolver aproximadamente as duas equações cujas componentes são pequenas. Posteriormente, basta substituí-las na componentes grandes e encontrar a solução.

PROBLEMAS

- Ao analisar ordens mais baixas na aproximação usual, encontra-se que o hamiltoniano associado com as componentes grandes não é hermitiano. Isto se deve ao fato de aparecer “momento de dipolo elétrico” imaginário para a partícula. Além disso, todas as quatro componentes do espinor devem ser levadas em conta no cálculo do valor esperado de operadores da ordem v^2/c^2 .

- Algumas diferenças surgem quando comparamos os operadores na teoria de Dirac (TD) e na teoria de Pauli (TP):

i) na TD, a velocidade da partícula é representada pelo operador $c\vec{\alpha}$, cujos autovalores são dados por ± 1 . Por outro lado, na TP o operador velocidade é \vec{p}/m , o qual possui como autovalores todos os números reais;

ii) na TD, diferentes componentes do operador velocidade não comutam e portanto não são mensuráveis simultaneamente. Já na TP, não há problema algum em medir simultaneamente as diferentes componentes de \vec{p}/m .

A partir dos problemas citados, percebemos que a relação entre a TD e a TP não fica bem estabelecida quando se utiliza o método usual. Pensando nestes problemas, F. L. Foldy e S. A. Wouthuysen, em 1950 propuseram um método que consiste em uma transformação que leva a teoria de Dirac a uma nova representação. Com isso, obtiveram uma teoria análoga a teoria de Pauli capaz de permitir uma comparação direta entre as duas.

O principal interesse na transformação FW é deixar o hamiltoniano de Dirac livre de operadores ímpares², mais especificamente livre do operador $\vec{\alpha}$. Desta maneira, podemos representar os estados de energia positiva e negativa por um espinor tendo somente duas componentes diferente de zero em cada caso.

Para sermos mais explícitos, queremos encontrar uma transformação unitária do tipo

$$\Psi = e^{-iS}\Psi' \quad (4.49)$$

que desacople as componentes do espinor. Com a substituição de (4.49) na equação de Dirac

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (4.50)$$

obtemos

$$\begin{aligned} H[e^{-iS}\Psi'] &= i\hbar \frac{\partial [e^{-iS}\Psi']}{\partial t} \\ &= i\hbar \left[e^{-iS} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial e^{-iS}}{\partial t} \right) \right] \Psi'. \end{aligned} \quad (4.51)$$

²Um operador ímpar na teoria de Dirac é uma matriz que possui somente elementos que deixam as componentes do espinor dependentes umas das outras. Um operador par é aquele que não possui tais elementos. Existem 16 operadores na teoria de Dirac, sendo $\mathbb{1}$, β , $\vec{\sigma}$ e $\beta\vec{\sigma}$ pares e $\vec{\alpha}$, $\beta\vec{\alpha}$, $\gamma^5 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e $\beta\gamma^5$ ímpares.

Multiplicando (4.51) por e^{iS} em ambos os lados, vemos que

$$\begin{aligned}
 e^{iS} H e^{-iS} \Psi' &= i\hbar \left[e^{iS} e^{-iS} \frac{\partial \Psi'}{\partial t} + e^{iS} \left(\frac{\partial e^{-iS}}{\partial t} \right) \Psi' \right] \\
 \left[e^{iS} H e^{-iS} - i\hbar e^{iS} \left(\frac{\partial e^{-iS}}{\partial t} \right) \right] \Psi' &= i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \\
 \implies H' \Psi' &= i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}, \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

onde $H' = e^{iS} H e^{-iS} - i\hbar e^{iS} \left(\frac{\partial e^{-iS}}{\partial t} \right)$ é o hamiltoniano transformado. Com isso, o problema se resume em encontrar S que deixe H' independente dos operadores ímpares.

Para o caso da partícula livre, podemos construir S de maneira exata. Por simplificação, vamos supor que não há dependência temporal no hamiltoniano e que a transformação seja da forma

$$S = -i\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \theta, \tag{4.53}$$

e consequentemente,

$$e^{iS} = \cos \theta + \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \sin \theta. \tag{4.54}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 H' = e^{iS} H e^{-iS} &= \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \left(\cos 2\theta - \frac{m}{|\vec{p}|} \sin 2\theta \right) \\
 &+ \beta (m \cos 2\theta + |\vec{p}| \sin 2\theta). \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Supondo que θ satisfaz as condições

$$\sin 2\theta = \frac{|\vec{p}|}{E} \quad e \quad \cos 2\theta = \frac{m}{E}, \tag{4.56}$$

eliminamos os operadores ímpares $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ e o hamiltoniano transformado por fim é dado por

$$H' = \beta (m^2 + p^2)^{1/2} = \beta E. \tag{4.57}$$

4.1.3.2 Limite não relativístico - algoritmo de Deutsch

Vamos agora aplicar a transformação FW para o nosso caso particular em que há interação eletromagnética para obter o limite não-relativístico do algoritmo implementado.

No algoritmo de Deutsch, vimos que o hamiltoniano responsável pela evolução do sistema é dado pela expressão (4.18). Podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$H = mc^2\beta + \mathcal{P} + \mathcal{J}, \quad (4.58)$$

onde $\beta = \sigma_z$, $\mathcal{P} = 0$ e $\mathcal{J} = c(p - qE_0t)\sigma_x$, cuja notação \mathcal{P} e \mathcal{J} indica que os operadores são pares e ímpares, respectivamente. Além disso, consideraremos que a ordem destes operadores não deve ser muito menor do que $1/m$. Sendo assim, podemos supor que para este caso a transformação é da forma

$$S = -\frac{i}{2m}\beta\mathcal{J}. \quad (4.59)$$

Assim, o hamiltoniano na nova representação pode ser expandido como uma série de potência de $1/m$, dada por

$$\begin{aligned} H' &= e^{iS}He^{-iS} - i\hbar e^{iS} \left(\frac{\partial e^{-iS}}{\partial t} \right) \\ &= mc^2\beta + \mathcal{P} + \beta \frac{\mathcal{J}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2c^4} \left[\mathcal{J}, [\mathcal{J}, \mathcal{P}] + \hbar \frac{d\mathcal{J}}{dt} \right] \\ &\quad - \frac{\hbar\beta}{2mc^2} \frac{d\mathcal{J}}{dt} + \frac{\beta}{2mc^2} [\mathcal{J}, \mathcal{P}] - \frac{\mathcal{J}^3}{3m^2c^4} + \dots \end{aligned} \quad (4.60)$$

Precisamos, então, determinar como fica o hamiltoniano transformado para o nosso problema em (1+1) dimensões que fornecerá o limite não-relativístico para o nosso algoritmo. Nos preocuparemos apenas com os termos de H' que vão até a ordem de $(1/m^2)$.

Sistematicamente, o cálculo de cada termo de (4.60) nos fornece os seguintes resultados:

$$\mathcal{J}^2 = c^2(p - qE_0t)^2 \overbrace{\sigma_x^2}^{=1} = c^2(p - qE_0t)^2, \quad (4.61a)$$

$$[\mathcal{J}, \mathcal{P}] = [c(p - qE_0t)\sigma_x, 0] = 0, \quad (4.61b)$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d}{dt} c(p - qE_0t)\sigma_x = -cqE_0\sigma_x, \quad (4.61c)$$

$$[\mathcal{J}, [\mathcal{J}, \mathcal{P}]] = 0, \quad (4.61d)$$

$$\left[\mathcal{J}, \frac{d\mathcal{J}}{dt} \right] = c(p - qE_0t)(-cqE_0)[\sigma_x, \sigma_x] = 0, \quad (4.61e)$$

$$\mathcal{J}^3 = c^3(p - qE_0t)^3 \overbrace{\sigma_x^3}^{=\sigma_x} = c^3(p - qE_0t)^3 \sigma_x. \quad (4.61f)$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} H' &= mc^2 \sigma_z + \frac{(p - qE_0t)^2}{2m} \sigma_z + i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0t)^3}{3m^2 c} \sigma_x \\ &= mc^2 \sigma_z + \mathcal{P}' + \mathcal{J}', \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde $\mathcal{P}' = \frac{(p - qE_0t)^2}{2m} \sigma_z$ e $\mathcal{J}' = i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0t)^3}{3m^2 c} \sigma_x$. Vemos que o hamiltoniano continua dependente de operadores ímpares na expressão (4.62). Por conta disto, vamos aplicar novamente a transformação FW, só que agora no hamiltoniano $H'(t)$. Assim, os seguintes resultados são obtidos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'^2 &= \left[i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0t)^3}{3m^2 c} \sigma_x \right]^2 \\ &= i^2 \left(\frac{qE_0 \hbar}{2mc} \right)^2 \overbrace{(\sigma_y)^2}^{\mathbb{1}} - i \frac{qE_0 \hbar}{6m^3 c^2} (p - qE_0t)^3 \overbrace{[(\sigma_y \sigma_x + \sigma_x \sigma_y)]}^{=0} \\ &\quad + \frac{1}{9m^4 c^2} (p - qE_0t)^6 \overbrace{\sigma_x^2}^{=\mathbb{1}} \\ &= - \left(\frac{qE_0 \hbar}{2mc} \right)^2 + \frac{1}{9m^4 c^2} (p - qE_0t)^6, \end{aligned} \quad (4.63a)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}', \mathcal{P}'] &= \left[i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0t)^3}{3m^2 c} \sigma_x, \frac{(p - qE_0t)^2}{2m} \sigma_z \right] \\ &= i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \frac{(p - qE_0t)^2}{2m} \overbrace{[\sigma_y, \sigma_z]}^{=2i\sigma_x} - \frac{(p - qE_0t)^3}{3m^2 c} \frac{(p - qE_0t)^2}{2m} \overbrace{[\sigma_x, \sigma_z]}^{=-2i\sigma_y} \\ &= - \frac{qE_0 \hbar}{2m^2 c T} (p - qE_0t)^2 \sigma_x + i \frac{(p - qE_0t)^5}{3m^3 c} \sigma_y, \end{aligned} \quad (4.63b)$$

$$\frac{d\mathcal{J}'}{dt} = \frac{d}{dt} \left[i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0t)^3}{3m^2 c} \sigma_x \right] = \frac{(p - qE_0t)^2}{m^2 c} qE_0 \sigma_x, \quad (4.63c)$$

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}', [\mathcal{J}', \mathcal{P}']] &= \left[i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0 t)^3}{3m^2 c} \sigma_x, \right. \\
&\quad \left. - \frac{qE_0 \hbar}{2m^2 c} (p - qE_0 t)^2 \sigma_x + i \frac{(p - qE_0 t)^5}{3m^3 c} \sigma_y \right] \\
&= -i \frac{q^2 E_0^2 \hbar^2}{4m^3 c^2} (p - qE_0 t)^2 \overbrace{[\sigma_y, \sigma_x]}^{=-2i\sigma_z} - i \frac{(p - qE_0 t)^8}{9m^5 c^2} \overbrace{[\sigma_x, \sigma_y]}^{=2i\sigma_z} \\
&= \left[\frac{2(p - qE_0 t)^8}{9m^5 c^2} - \frac{q^2 E_0^2 \hbar^2}{2m^3 c^2} (p - qE_0 t)^2 \right] \sigma_z, \quad (4.63d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{J}', \frac{d\mathcal{J}'}{dt} \right] &= \left[i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \sigma_y - \frac{(p - qE_0 t)^3}{3m^2 c} \sigma_x, \frac{(p - qE_0 t)^2}{m^2 c} qE_0 \sigma_x \right] \\
&= i \frac{qE_0 \hbar}{2mc} \frac{(p - qE_0 t)^2}{m^2 c} qE_0 \overbrace{[\sigma_y, \sigma_x]}^{=-2i\sigma_z} \\
&= \frac{q^2 E_0^2 \hbar}{m^3 c^2} (p - qE_0 t)^2 \sigma_z. \quad (4.63e)
\end{aligned}$$

Assim, o novo hamiltoniano transformado é dado por

$$\begin{aligned}
H'' &= mc^2 \sigma_z + \frac{(p - qE_0 t)^2}{2m} \sigma_z \\
&\quad + \frac{1}{2mc^2} \left[+ \frac{1}{9m^4 c^2} (p - qE_0 t)^6 - \left(\frac{qE_0 \hbar}{2mc} \right)^2 \right] \sigma_z \\
&\quad - \frac{1}{8m^2 c^4} \left[\frac{2(p - qE_0 t)^8}{9m^5 c^2} \right] \sigma_z - i \frac{qE_0 \hbar}{2m^3 c^3} (p - qE_0 t)^2 \sigma_y \\
&\quad - \frac{1}{2mc^2} \left[i \frac{qE_0 \hbar}{2m^2 c} (p - qE_0 t)^2 \sigma_y - \frac{(p - qE_0 t)^5}{3m^3 c} \sigma_x \right] \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Note que o hamiltoniano H'' continua dependente de operadores ímpares. Porém, como mencionamos anteriormente, estamos interessados nos termos até a ordem $(1/m^2)$ na equação (4.64). Estes termos estão todos dependentes de operadores pares. Com esta aproximação não precisamos mais transformar o hamiltoniano $H''(t)$, basta considerar que

$$H'' = \left[mc^2 + \frac{1}{2m} (p - qE_0 t)^2 \right] \sigma_z. \quad (4.65)$$

Uma vez que hamiltoniano acima não depende de operadores ímpares, sua

solução continua sendo um espinor de duas componentes, uma componente para o autoestado de energia positiva (partícula) e uma para o autoestado de energia negativa (antipartícula). Vale ressaltar que isto não ocorre quando tomamos o limite não-relativístico através do método usual. Para a partícula de energia positiva interagindo com o campo, o reconhecimento do hamiltoniano de Pauli é imediato na expressão (4.65).

Precisamos, ainda, ver o que ocorre com o teorema adiabático neste caso limite para fazer a comparação com o caso relativístico. Da expressão (4.65), obtemos que as autoenergias e autoestados do operador H'' são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\epsilon_{\pm} &= \pm \left[mc^2 + \frac{1}{2m} (p - qE_0 t)^2 \right] \\ &= \pm [\Gamma^2 + \Pi(t)^2],\end{aligned}\tag{4.66}$$

onde $\Gamma = mc^2$ e $\Pi(t) = \frac{(p - qE_0 t)^2}{2m}$ e

$$|\epsilon_+\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\epsilon_-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tag{4.67}$$

(autoestados da matriz σ_z).

Note que, apesar dos autoestados instantâneos de H'' , dados em (4.67), serem os autoestados da matriz σ_z de Pauli, não representam o spin da partícula, mas sim o estado de partícula e o de antipartícula.

Infelizmente, este método não nos permite encontrar a condição adiabática para o tempo de computação neste regime, pois os autoestados instantâneos são constantes no tempo, ou seja, não há evolução do sistema. Além disso, através do hamiltoniano (4.65) seria impossível implementar o algoritmo sem a evolução do sistema. Precisamos encontrar uma maneira de comparar os casos relativístico e não-relativístico. Para isto, vamos utilizar o hamiltoniano de Landau-Zener-Stückelber [65] como sendo o análogo não relativístico.

4.1.4 Teoria de Landau-Zener-Stückelberg - Uma alternativa para o limite não-relativístico

O modelo de um sistema quântico de dois níveis (SQDN) é o sistema mais simples da mecânica quântica, mas mesmo assim, ilustra muito bem as

características e particularidades desta teoria. Embora seja uma aproximação do aspecto real da natureza, durante toda a história da mecânica quântica, o SQDN foi capaz de descrever sistemas quânticos naturais como as transições eletrônicas em um “átomo de dois níveis”, o spin $1/2$ de partículas quânticas, bem como explicar o comportamento da molécula de amônia [62].

Podemos, ainda, abordar um sistema quântico de dois níveis de energia juntamente com algum parâmetro externo que varia com o tempo. Neste caso, há possibilidade de o sistema sofrer ou não alguma transição (regimes não-adiabático e adiabático, respectivamente). A figura 12 ilustra bem este tipo de comportamento quando consideramos a variação dos níveis energéticos com um parâmetro externo $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \sin(\omega t)$. Na parte (a), as curvas sólidas (azul e vermelha) representam o regime adiabático, cujo *gap* de energia é dado por Δ . As curvas tracejadas representam o regime não-adiabático, quando há o cruzamento de níveis. Na parte (b), temos o comportamento de $\varepsilon(t)$.

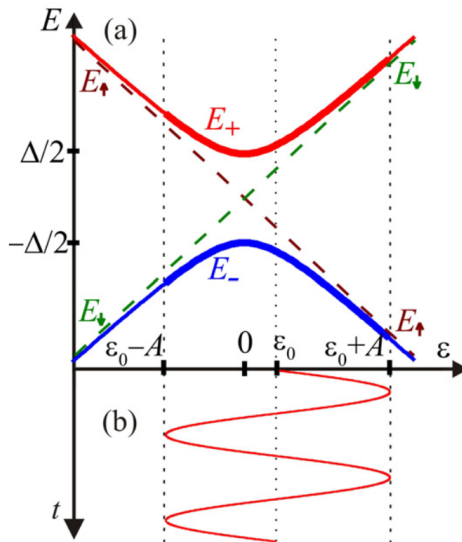


Figura 12: (a) Níveis energéticos E em um SQDN em função de um parâmetro externo dependente do tempo $\varepsilon(t)$. (b) Comportamento do parâmetro externo $\varepsilon(t)$. Figura retirada de [63].

A probabilidade de transição entre os dois estados no SQDN foi estudada, de maneira independente, por L. Landau [64], C. Zener [65] e E. C. G. Stückelberg [66] em meados de 1932, possibilitando uma vasta aplicabilidade

na área da física atômica [67–71]. Ultimamente a teoria de Landau-Zener-Stückelberg (LZS) tem recebido grande atenção no contexto da computação quântica, tanto para os casos em que estas transições são benéficas [72–78], quanto para os casos em que são indesejadas (computação quântica adiabática) [63, 79].

Em função de tudo que mencionamos anteriormente, vamos tratar o problema de LZS como um análogo não-relativístico do algoritmo que implementamos. Diferentemente do que fizemos através da transformação FW, no qual bastava considerar o hamiltoniano que governa a evolução e tomar o limite não-relativístico, agora precisamos construir novamente todo o algoritmo de Deutsch com o hamiltoniano de LZS e comparar suas similaridades e diferenças com o caso relativístico.

Seja

$$H_{\text{LZS}}(t) = -\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\varepsilon(t)}{2}\sigma_x, \quad (\text{consideramos } \hbar = 1) \quad (4.68)$$

o hamiltoniano do sistema, onde Δ descreve a separação entre os níveis de energia e $\varepsilon(t) = vt$ é um parâmetro externo que varia linearmente com o tempo. Perceba que o problema original de LZS considera o parâmetro externo como uma função senoidal do tempo. Para ficar consistente com a nossa abordagem relativística, vamos tomar o caso particular onde esse parâmetro depende linearmente do tempo, que é o caso em que a referência [63] nomeia de *transição de LZS de única passagem*.

De acordo com o hamiltoniano (4.68), fica clara a similaridade com o hamiltoniano de Dirac (4.2) em (1+1) dimensões. É natural conceber que todas as contas que realizamos para o caso relativístico serão mapeadas para o problema de LZS, substituindo apenas $c[p - qA(t)] \rightarrow \frac{\varepsilon(t)}{2}$ e $mc^2 \rightarrow -\frac{\Delta}{2}$ nas equações correspondentes, e tratando p como um número clássico. Com isso, os autoestados instantâneos e os autovalores de energia de (4.68) são dados, respectivamente, por

$$|E_{\oplus}, t\rangle = C_+ \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ 2E_{\oplus} + \Delta \end{bmatrix}, \quad C_+ = [\varepsilon(t)^2 + (2E_{\oplus} + \Delta)^2]^{-1/2}, \quad (4.69)$$

$$|E_{\ominus}, t\rangle = C_- \begin{bmatrix} 2E_{\ominus} - \Delta \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, \quad C_- = [\varepsilon(t)^2 + (2E_{\ominus} - \Delta)^2]^{-1/2}, \quad (4.70)$$

e

$$E_{\oplus} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2} \quad \text{e} \quad E_{\ominus} = -\frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2}. \quad (4.71)$$

Sendo assim, supomos que o hamiltoniano inicial ($t = 0$) seja

$$H_{\text{LZS}}(0) = -\frac{\Delta}{2}\sigma_z, \quad (4.72)$$

e que o sistema esteja inicialmente no estado de maior energia de (4.72),

$$|E_{\oplus}, 0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

No final da evolução ($t = T$), o hamiltoniano se torna

$$H_{\text{LZS}}(T) = -\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{vT}{2}\sigma_x, \quad (4.74)$$

de modo que o estado do sistema seja o estado de maior energia de (4.74),

$$|E_{\oplus}, T\rangle = C_+ \begin{bmatrix} vT \\ 2E_{\oplus} + \Delta \end{bmatrix}, \quad C_+ = [(vT)^2 + (2E_{\oplus} + \Delta)^2]^{-1/2}. \quad (4.75)$$

Neste caso, o algoritmo de Deutsch é codificado da seguinte forma

$$\varepsilon(0) := 0 \quad (4.76a)$$

$$\implies E_{\oplus} = \frac{\Delta}{2} \quad (4.76b)$$

$$\varepsilon(T) := \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|\Delta}{2} \quad (4.76c)$$

$$\implies E_{\oplus} := \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 + \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2}{4}}. \quad (4.76d)$$

Assim, o estado no final da evolução (4.75) no algoritmo ganha a forma

$$|E_{\oplus}\rangle = C_+ \begin{bmatrix} \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|\Delta}{2} \\ \Delta \left(\sqrt{1 + \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2}{4}} + 1 \right) \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

e

$$C_+ = \left[\frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2 \Delta^2}{4} + \Delta^2 \left(\sqrt{1 + \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2}{4}} + 1 \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.78)$$

Como podemos ver, o estado final do sistema depende apenas se a função é constante ou balanceada. Assim,

i) se a função f for constante:

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) = f(1) = 1$$

$$\Rightarrow |E_{\oplus}\rangle_{\text{const}} = \frac{1}{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \otimes |p\rangle; \quad (4.79)$$

ii) se a função f for balanceada:

$$f(0) = 0 \text{ e } f(1) = 1 \quad \text{ou} \quad f(0) = 1 \text{ e } f(1) = 0$$

$$\Rightarrow |E_{\oplus}\rangle_{\text{bal}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes |p\rangle. \quad (4.80)$$

Desta forma, uma única medida projetiva no estado final do sistema determina se a função é constante ou balanceada. Se a probabilidade de medir o sistema no estado $|0\rangle$ for $|\langle 0|E_{\oplus}\rangle|^2 \neq 0$, a função é constante com certeza, porém se for $|\langle 0|E_{\oplus}\rangle|^2 = 0$ a função pode ser tanto constante quanto balanceada. A mesma análise feita para o caso relativístico, apresentada na seção 4.1, se aplica aqui. A única consideração que deve ser feita é que trocamos os estados nas medidas $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ devido ao mapeamento $mc^2 \rightarrow -\Delta$. Com isso, concluímos que o limite não-relativístico do algoritmo implementado também é probabilístico e possui as mesmas características discutidas anteriormente no caso relativístico.

De maneira análoga ao que fizemos para o caso relativístico, vamos supor que o hamiltoniano que governa a evolução é uma interpolação linear

entre os hamiltonianos (4.72) e (4.74):

$$\begin{aligned} H(s) &= (1-s)H_{\text{LZS}}(0) + sH_{\text{LZS}}(T) \\ &= -\frac{\Delta}{2}\sigma_z + s\frac{\varepsilon(T)}{2}\sigma_x. \end{aligned} \quad (4.81)$$

O objetivo agora se resume em calcular a condição adiabática para o limite não-relativístico e compará-la com a obtida para o caso relativístico, ou seja, fazer a análise das vantagens e desvantagens computação quântica adiabática relativística.

4.1.5 Condição Adiabática para o Limite Não-Relativístico

Os resultados que apresentaremos nesta seção em relação a condição adiabática para o limite não-relativístico serão muito parecidos com os apresentados na seção 4.1.2 para o caso relativístico. Por este motivo, os abordaremos de maneira mais compacta.

Cálculo do *gap*:

O *gap* instantâneo entre os autoestados (4.69) e (4.70) do hamiltoniano (4.81) é dado por

$$g_{+-} = E_{\oplus}(t) - E_{\ominus}(t) = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(T)^2 s^2}. \quad (4.82)$$

Diferentemente da maneira que procedemos para o caso relativístico, não há necessidade de analisarmos as funções $\mathcal{G}(s)$ e $\mathcal{F}(s)$ para valores positivos, negativos ou nulos de $\varepsilon(T)$. Note que, uma vez que o *gap* $\Delta \neq 0$ e independentemente do valor que $\varepsilon(T)$ assuma, a equação (4.82) é minimizada quando o termo $[s\varepsilon(T)]^2 = 0$. Com estas considerações, é fácil ver que

$$\mathcal{G} = \min_{0 \leq s \leq 1} \left| \sqrt{\Delta^2 + [\varepsilon(T)s]^2} \right| = \Delta. \quad (4.83)$$

Para completarmos a análise e determinarmos a condição para o tempo de computação, precisamos ainda, maximizar a função $\mathcal{F}(s)$. Começaremos calculando o termo $\left\langle E_{\ominus}, s \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| E_{\oplus}, s \right\rangle$. Da equação (4.81),

$$\frac{dH(s)}{ds} = \frac{\varepsilon}{2}\sigma_x, \quad (4.84)$$

onde, por simplificação, escrevemos $\varepsilon = \varepsilon(T)$. Isto implica que,

$$\begin{aligned}
 \left\langle E_{\ominus}, s \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| E_{\oplus}, s \right\rangle &= C_- [\langle 0 | \varepsilon s + \langle 1 | \overbrace{(2E_{\ominus} - \Delta)}^{=-E_{\oplus}}] \\
 &\times \left(\frac{\varepsilon}{2} \sigma_x \right) C_+ [(2E_{\oplus} + \Delta) | 0 \rangle + \varepsilon s | 1 \rangle] \\
 &= \frac{C_+ C_- \varepsilon}{2} [\langle 0 | \varepsilon s - \langle 1 | (2E_{\oplus} + \Delta)] \\
 &\times [(2E_{\oplus} + \Delta) | 1 \rangle + \varepsilon s | 0 \rangle] \\
 &= \frac{C_+ C_- \varepsilon}{2} [\varepsilon^2 s^2 - (2E_{\oplus} + \Delta)^2]. \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 C_+ C_- &= [\varepsilon^2 s^2 + (2E_{\oplus} + \Delta)^2]^{-1/2} [\varepsilon^2 s^2 + \overbrace{(2E_{\ominus} - \Delta)^2}^{=-E_{\oplus}}]^{-1/2} \\
 &= [\varepsilon^2 s^2 + (2E_{\oplus} + \Delta)^2]^{-1}, \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\langle E_{\ominus}, s \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| E_{\oplus}, s \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\varepsilon^2 s^2 - (2E_{\oplus} + \Delta)^2}{\varepsilon^2 s^2 + (2E_{\oplus} + \Delta)^2} \right]. \quad (4.87)$$

Substituindo o resultado (4.87) em (2.27a), vemos que a função $\mathcal{F}(s)$ é dado por

$$\mathcal{F} = \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\varepsilon^2 s^2 - (2E_{\oplus} + \Delta)^2}{\varepsilon^2 s^2 + (2E_{\oplus} + \Delta)^2} \right] \right|. \quad (4.88)$$

Por fim, escrevendo explicitamente o valor de E_{\oplus} na expressão acima, obtemos a seguinte condição:

$$\mathcal{F} = \max_{0 \leq s \leq 1} \left| -\frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\left(\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon s)^2} + \Delta \right)^2 - (\varepsilon s)^2}{\left(\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon s)^2} + \Delta \right)^2 + (\varepsilon s)^2} \right] \right|. \quad (4.89)$$

Para concluir a análise, falta o valor máximo de $\mathcal{F}(s)$. Vemos pela aparência da expressão (4.89) que como os termos $(\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon s)^2} + \Delta)^2 > 0$ e $(\varepsilon s)^2 > 0$, devido a diferença no numerador, temos que o valor máximo desta função ocorre quando o termo $(\varepsilon s)^2$ possui seu valor mínimo, ou seja, quando é

nulo. Desta forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left| -\frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\left(\sqrt{\Delta^2 + (\cancel{\varepsilon s})^2} \overset{0}{+} \Delta \right)^2 - (\cancel{\varepsilon s})^2 \overset{0}{+} 0}{\left(\sqrt{\Delta^2 + (\cancel{\varepsilon s})^2} \overset{0}{+} \Delta \right)^2 + (\cancel{\varepsilon s})^2 \overset{0}{+} 0} \right] \right|, \\ &= \left| -\frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\left(\sqrt{\Delta^2 + \Delta} \right)^2}{\left(\sqrt{\Delta^2 + \Delta} \right)^2} \right] \right| \overset{1}{=} \frac{\hbar \varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Substituindo os resultados (4.83) e (4.90) na condição adiabática para o tempo, encontramos que

$$T \gg \frac{\varepsilon}{2\Delta^2}. \quad (4.91)$$

Como $\varepsilon = \frac{|(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|\Delta}{2}$, a expressão acima se torna

$$T \gg \frac{1}{4\Delta} |(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|. \quad (4.92)$$

A condição (4.92) fornece dois resultados possíveis, um para quando o resultado da computação f for constante, $T_{\text{const}} \gg 1/2\Delta$, e outro para f balanceada, $T_{\text{balan}} \gg 0$. Para o caso da função balanceada, vemos que a adiabaticidade é sempre satisfeita no sistema, ou seja, o sistema nunca mudará seu estado durante toda evolução. No caso constante, precisamos de um tempo grande, comparado ao primeiro caso, para que a condição adiabática seja satisfeita. Portanto, para que ambas as condições sejam englobadas, vamos tomar como condição para o tempo total de computação

$$T_{\text{computação}} \gg \frac{1}{2\Delta}. \quad (4.93)$$

O próximo passo é comparar numericamente os resultados encontrados para o tempo de computação nos regimes relativístico e não relativístico. A alternativa para obter um valor numérico no caso não relativístico leva em conta valores encontrados para Δ em quatro estudos diferentes da interferometria de LZS³ usando qubits supercondutores [77, 80–82]. A tabela a seguir

³Quando um sistema de dois níveis é submetido a um parâmetro externo periódico e de alta

apresenta estes valores⁴:

Referência	Δ (2 π GHz)
Oliver et al. [80]	0,004
Sillanpää et al. [81]	12,5
Wilson et al. [82]	2,6
Izmalkov et al. [77]	3,5

Tabela 1: Valores experimentais para a diferença de energia Δ .

No nosso caso, para o cálculo da condição adiabática no tempo total de computação escolhemos utilizar o valor médio dos valores acima, $\Delta_{\text{med}} = 29,2$ GHz. Com isso, temos que a condição (4.92) é dada por

$$T_{\text{computação}} \gg 17,0 \text{ ps.} \quad (4.94)$$

Comparação entre os tempos de computação:

Antes de comparar os valores para o tempo de computação precisamos ressaltar que estamos trabalhando com dois sistemas distintos, um relativístico e um não-relativístico, que possuem um hamiltoniano com a mesma forma matemática. Fisicamente, estes hamiltonianos podem representar sistemas físicos diferentes entre si e até agora não discutimos o que na prática estamos descrevendo com o auxílio da teoria de LZS. Por conta disto, vamos pensar que estamos lidando com “duas tecnologias” distintas, uma quântica não-relativística e uma quântica relativística, e que precisamos responder a seguinte pergunta:

“Qual tecnologia é capaz de computar/resolver o problema de Deutsch adiabático em um menor tempo possível?”

Comparando os resultados obtidos para os tempos de computação em ambos os regimes, (4.94) e (4.41), obtemos que o valor do tempo de computação para o caso não-relativístico capaz de garantir a adiabaticidade do sistema é 10^{11} vezes maior do que no caso relativístico. Este resultado mostra que o algoritmo de Deutsch adiabático relativístico implementado nesta dissertação

amplitude, há ocorrência de uma sequência de transições de Landau-Zener. A fase acumulada entre as transições (fase de Stückelberg) pode resultar em uma interferência construtiva ou destrutiva, conhecidas como interferência de LZS. A interferometria de LZS estuda este fenômeno em diferentes sistemas físicos.

⁴Os valores de Δ apresentados na tabela 4.1 estão em unidade de frequência pois estamos considerando $\hbar = 1$. Note que efetivamente corresponde ao *gap* entre os níveis energéticos do sistema, cuja unidade no S. I. é o J.

é muito mais rápido do que o original e que levar em conta os efeitos relativísticos, intrínsecos das partículas elementares, acarreta em um ganho computacional.

É importante lembrar que não estamos discutindo as dificuldades da realização experimental do algoritmo de Deutsch em ambos casos, relativístico e não-relativístico. Tal tópico é de suma importância, mas não será abordado aqui.

Poderíamos ainda nos perguntar qual a frequência natural de oscilação de um sistema não-relativístico capaz de fornecer a mesma condição para o tempo de computação do caso relativístico, cujo valor calculado foi $T_{\text{Rel}} \gtrsim 10^{-20}$ s. Sendo assim,

$$\Delta \gtrsim \frac{1}{2T_{\text{Rel}}} = 0,5 \times 10^{20} \text{ Hz} \quad (\text{radiação gama}). \quad (4.95)$$

A frequência característica encontrada para o sistema é típica da radiação gama, que são as radiações eletromagnéticas com os menores comprimentos de onda conhecidos. Na natureza, estas radiações podem ser emitidas em sistemas altamente energéticos, como por exemplo em transições entre estados de núcleos atômicos ou como produto do decaimento de certas partículas elementares. No nosso caso, estamos considerando um sistema não-relativístico, e consequentemente, pouco energético. Não conhecemos um sistema capaz de oscilar com esta frequência neste regime e, por conta disto, seria impossível implementar a computação quântica adiabática não-relativística comparável com a relativística. Esta última afirmação fortalece o fato de que o algoritmo implementado baseado na teoria da relatividade é capaz de resolver o problema de Deutsch em um menor tempo do que o seu análogo não relativístico.

Condição para o parâmetro de controle

Vamos, a partir da expressão (2.26), obter uma condição para o parâmetro externo de controle no problema de LZS que garanta a adiabaticidade do sistema. Como mencionado anteriormente, este parâmetro de controle na prática não precisa necessariamente representar o potencial vetor $A(t)$, neste caso ele é dado por $\varepsilon(t) = vt$ que vai depender do sistema físico considerado.

Já calculamos os valores \mathcal{G} e \mathcal{F} ; basta substituí-los na condição (2.26).

Assim,

$$\mathcal{F} \ll \mathcal{G}^2$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| -\frac{v}{2} \left[\frac{\left(\sqrt{\Delta^2 + (vt)^2} - \Delta \right)^2 - (vt)^2}{\left(\sqrt{\Delta^2 + (vt)^2} - \Delta \right)^2 + (vt)^2} \right] \right| \ll \left[\min_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\Delta^2 + (vt)^2} \right| \right]^2. \quad (4.96)$$

Considerando os mesmos argumentos utilizados quando calculamos a condição para o tempo total de computação, podemos concluir que os extremos para as funções \mathcal{G} e \mathcal{F} ocorrem em $vt = 0$. Assim,

$$\frac{v}{2} \ll \Delta^2 \quad \text{ou} \quad v \ll 2\Delta^2. \quad (4.97)$$

4.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC EM (1+1) DIMENSÕES

Nesta seção verificaremos se a condição adiabática encontrada para o nosso sistema é realmente válida, ou seja, se há transição entre os níveis de energia do nosso sistema ainda que estejamos sob as condições encontradas na seção anterior para a adiabaticidade. Para isso, encontraremos a solução da equação de Dirac para o elétron interagindo com o campo eletromagnético e calcularemos a probabilidade de o sistema não mudar seu estado durante a evolução.

Sabemos que a equação de Dirac possui a seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle, \quad (4.98)$$

onde

$$H = mc^2 \sigma_z + c (\hat{p} - qE_0 t) \sigma_x. \quad (4.99)$$

Note que o problema original possui a componente com dependência temporal ao longo do eixo x . Para facilitar a resolução do problema, podemos transferir a dependência temporal para o eixo z através de uma rotação⁵ de um ângulo de $\pi/2$ em torno do eixo y [63]. Desta forma, trabalharemos com o

⁵O operador de rotação é definido como

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-i\theta \frac{\hat{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z), \quad (4.100)$$

onde \hat{n} é um vetor unitário tridimensional e θ é o ângulo de rotação.

hamiltoniano transformado H' ,

$$\begin{aligned}
 H' &= e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} H e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \\
 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbb{1} + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sigma_y \right] [mc^2 \sigma_z + c(\hat{p} - qE_0 t) \sigma_x] \\
 &\times \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sigma_y \right] \\
 &= \frac{mc^2}{2} [\sigma_z - i[\sigma_z, \sigma_y] + \sigma_y \sigma_z \sigma_y] + \frac{c(\hat{p} - qE_0 t)}{2} [\sigma_x - i[\sigma_x, \sigma_y] + \sigma_y \sigma_x \sigma_y].
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Utilizando as propriedades $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c$ e $\sigma_a\sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}\mathbb{1}$, temos que

$$[\sigma_z + i[\sigma_z, \sigma_y] + \sigma_y \sigma_z \sigma_y] = \sigma_z - i(-2i\sigma_x) + i(i\sigma_z) = -2\sigma_x \tag{4.102a}$$

$$[\sigma_x - i[\sigma_x, \sigma_y] + \sigma_y \sigma_x \sigma_y] = \sigma_x - i(2i\sigma_z) + i(i\sigma_x) = 2\sigma_z \tag{4.102b}$$

$$\implies H' = -mc^2 \sigma_x + c(\hat{p} - qE_0 t) \sigma_z. \tag{4.103}$$

Para que a equação de Dirac fique invariante sob a transformação adotada, o vetor de estado sofre a transformação

$$|\Psi'(t)\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} |\Psi(t)\rangle. \tag{4.104}$$

Uma forma conveniente de resolver a equação (4.98) com o hamiltoniano (4.103) é escrever o vetor de estado $|\Psi'(t)\rangle$ em termos da base do momento linear e da matriz σ_z , e encontrar uma equação diferencial para os coeficientes. Desta maneira, com o auxílio das relações de completudeza

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| = \mathbb{1}_{\hat{p}} \tag{4.105a}$$

$$\sum_{n=0}^1 |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}_{\hat{\sigma}_z} \tag{4.105b}$$

obtemos que o vetor de estado é dado por

$$|\Psi'(t)\rangle = \int dp [C_{0p}(p, t) |0, p\rangle + C_{1p}(p, t) |1, p\rangle]. \tag{4.106}$$

Na equação acima, os coeficientes

$$C_{0p} = \langle p, 0 | \Psi(t) \rangle, \quad (4.107a)$$

$$C_{1p} = \langle p, 1 | \Psi(t) \rangle, \quad (4.107b)$$

são funções complexas dependentes de p e t que obedecem a condição de normalização

$$\int \sum_{n=0}^1 |C_{np}(p, t)|^2 dp = 1.$$

Derivando (4.106) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\partial |\Psi'(t)\rangle}{\partial t} = \int dp [\dot{C}_{0p}(p, t) |0, p\rangle + \dot{C}_{1p}(p, t) |1, p\rangle]. \quad (4.108)$$

Aplicando o hamiltoniano de Dirac (4.103) em (4.106), ficamos com

$$\begin{aligned} H' |\Psi'(t)\rangle &= [-mc^2 \sigma_x + c(\hat{p} - qE_0 t) \sigma_z] \\ &\times \left\{ \int dp [C_{0p}(p, t) |0, p\rangle + C_{1p}(p, t) |1, p\rangle] \right\} \\ &= \left\{ \int -mc^2 [C_{0p}(p, t) |1, p\rangle + C_{1p}(p, t) |0, p\rangle] dp \right\} \\ &+ \left\{ \int c(p - qE_0 t) [C_{0p}(p, t) |0, p\rangle - C_{1p}(p, t) |1, p\rangle] dp \right\} \\ &= - \int dp [mc^2 C_{1p} - c(p - qE_0 t) C_{0p}] |0, p\rangle \\ &- \int dp [mc^2 C_{0p} + c(p - qE_0 t) C_{1p}] |1, p\rangle. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Por fim, substituindo (4.108) e (4.109) em (4.103):

$$\begin{aligned} i\hbar \int dp [\dot{C}_{0p}(p, t) |0, p\rangle + \dot{C}_{1p}(p, t) |1, p\rangle] \\ = - \int dp [mc^2 C_{1p} - c(p - qE_0 t) C_{0p}] |0, p\rangle \\ - \int dp [mc^2 C_{0p} + c(p - qE_0 t) C_{1p}] |1, p\rangle, \end{aligned} \quad (4.110)$$

nos resta duas equações acopladas a serem resolvidas

$$\dot{C}_{0p} = -\frac{ic}{\hbar} (p - qE_0t) C_{0p} + \frac{imc^2}{\hbar} C_{1p}, \quad (4.111a)$$

$$\dot{C}_{1p} = \frac{ic}{\hbar} (p - qE_0t) C_{1p} + \frac{imc^2}{\hbar} C_{0p}. \quad (4.111b)$$

4.2.1 Solução Analítica

Nesta seção resolveremos as equações de forma analítica. Primeiramente, reescrevemos as equações (4.111a) e (4.111b) da seguinte forma:

$$\dot{C}_{0p} = -i(\mu - vt)C_{0p} + i\rho C_{1p}, \quad (4.112a)$$

$$\dot{C}_{1p} = i(\mu - vt)C_{1p} + i\rho C_{0p}. \quad (4.112b)$$

onde $\mu = \frac{cp}{\hbar}$, $v = \frac{cqE_0}{\hbar}$ e $\rho = \frac{mc^2}{\hbar}$. Isolando o coeficiente C_{1p} na equação (4.112a) e derivando a expressão obtida em relação ao tempo, chegamos aos seguintes resultados

$$C_{1p} = \frac{-i\dot{C}_{0p} + (\mu - vt)C_{0p}}{\rho}, \quad (4.113a)$$

$$\dot{C}_{1p} = \frac{-i\ddot{C}_{0p} + (\mu - vt)\dot{C}_{0p} - vC_{0p}}{\rho}. \quad (4.113b)$$

Substituindo (4.113a) e (4.113b) em (4.112b), obtemos

$$\frac{-i\ddot{C}_{0p} + (\mu - vt)\dot{C}_{0p} - vC_{0p}}{\rho} = i(\mu - vt) \left[\frac{-i\dot{C}_{0p} + (\mu - vt)C_{0p}}{\rho} \right] + i\rho C_{0p} \quad (4.114)$$

$$-i\ddot{C}_{0p} + \cancel{(\mu - vt)\dot{C}_{0p}} - vC_{0p} = \cancel{(\mu - vt)\dot{C}_{0p}} + i(\mu - vt)^2 C_{0p} + i\rho^2 C_{0p} \quad (4.115)$$

$$\implies \ddot{C}_{0p} + [\zeta(t) - iv]C_{0p} = 0, \quad (4.116)$$

onde $\zeta(t) = \rho^2 + (\mu - vt)^2$. Para simplificar ainda mais, vamos dividir a equação (4.116) por ρ^2 . Desta forma, ficamos com

$$\frac{d^2 C_{0p}}{dt'^2} + [(\gamma - \kappa t')^2 + 1 - i\kappa] C_{0p} = 0, \quad (4.117)$$

tal que $t' = \rho t$, $\gamma = \frac{\mu}{\rho}$ e $\kappa = \frac{\nu}{\rho^2}$. A equação acima tem a forma da equação diferencial de Weber, cujas soluções são as chamadas funções cilíndricas parabólicas, denotadas por $D_\alpha(\pm z)$, onde α e z são números complexos [?, ?, ?]. Com o auxílio do *software* Mathematica, obtemos a solução para a equação (4.117):

$$C_{0p}(p, t') = c_1(p) D_\eta \left[\frac{-(1+i)(\gamma - \kappa t')}{\sqrt{\kappa}} \right] + c_2(p) D_{-1-\eta} \left[\frac{(1-i)(\gamma - \kappa t')}{\sqrt{\kappa}} \right], \quad (4.118)$$

com $\eta = -1 - \frac{i}{2\kappa}$. Substituindo o resultado encontrado para $C_{0p}(t, p)$ em (4.118) juntamente com sua derivada na equação (4.113a), encontramos a solução para $C_{1p}(p, t')$:

$$\begin{aligned} C_{1p}(p, t') = & (1-i)\sqrt{\kappa} c_1(p) D_{1+\eta} \left[-\frac{(1+i)(\gamma - \kappa t')}{\sqrt{\kappa}} \right] \\ & + (1+i)\sqrt{\kappa} c_2(p) D_{-\eta} \left[\frac{(1-i)(\gamma - \kappa t')}{\sqrt{\kappa}} \right] \\ & - 2(\gamma - \kappa t') c_2(p) D_{-1-\eta} \left[\frac{(1-i)(\gamma - \kappa t')}{\sqrt{\kappa}} \right]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Os coeficientes $c_1(p)$ e $c_2(p)$ presentes nas soluções acima serão determinados pelas condições iniciais do sistema.

Inicialmente, vamos supor que o sistema encontra-se no autoestado de maior energia, ou seja, no estado de elétron de acordo com (3.56). Além disso, vamos considerar que a partícula possua um momento inicial $p = p_i$ e que em $t = 0$ não há interação com o campo eletromagnético. Assim, podemos escrever o estado inicial do sistema como

$$|\Psi'(0)\rangle = N_+(0, p_i)[E_+(0, p_i) + \Gamma] |0, p_i\rangle + N_+(0, p_i)\alpha |1, p_i\rangle, \quad (4.120)$$

onde

$$N_+(0, p_i) = \frac{1}{\sqrt{[E_+(0, p_i) + \Gamma]^2 + \alpha^2}}, \quad (4.121)$$

$$E_+(0, p_i) = \sqrt{\Gamma^2 + \alpha^2}, \quad (4.122)$$

$$\Gamma = mc^2, \quad (4.123)$$

$$\alpha = cp_i. \quad (4.124)$$

Por simplificação de notação, a partir de agora vamos escrever $N_+(0, p_i) = N_i$ e $E_+(0, p_i) = E_i$. Utilizando as expressões (4.107a) e (4.107b), obtemos que os coeficientes no instante inicial são

$$\begin{aligned} C_{0p}(0, p_i) &= \langle p, 0 | \Psi(0) \rangle = \langle p, 0 | N_i(E_i + \Gamma) | 0, p_i \rangle + \langle p, 0 | N_i \alpha | 1, p_i \rangle \\ &= N_i(E_i + \Gamma) \delta(p - p_i), \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} C_{1p}(0, p_i) &= \langle p, 1 | \Psi(0) \rangle = \langle p, 1 | N_i(E_i + \Gamma) | 0, p_i \rangle + \langle p, 1 | N_i \alpha | 1, p_i \rangle \\ &= N_i \alpha \delta(p - p_i). \end{aligned} \quad (4.126)$$

Nas condições iniciais acima observamos a presença da delta Dirac. Isto ocorre pois a delta aparece como consequência da escolha de um estado com momento bem definido inicialmente. Escolhemos trabalhar com um grau de liberdade contínuo, ou seja, com a base de momento linear $\{|p\rangle : p \in \mathbb{R}\}$, cujos autovalores são dados por $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ e a relação de ortonormalidade por $\langle p|p_i\rangle = \delta(p - p_i)$. Apesar da coerência matemática, isto se torna um problema na hora de calcular a probabilidade do elétron permanecer em seu estado inicial. Por estarmos, efetivamente, interessados na possibilidade de haver transições no sistema deixamos subentendido o termo $\delta(p - p_i)$ presente nos coeficientes $C_{0p}(p_i, 0)$ e $C_{1p}(p_i, 0)$ nas próximas contas. Note que poderíamos ter escolhido outro estado inicial no grau de liberdade de momento linear sem a presença de tal anomalia. Entretanto, como estamos interessados na análise da probabilidade de transição entre os autoestados do hamiltoniano de Dirac, a delta não será um problema. Isto significa que efetivamente analisaremos os termos que multiplicam a delta de Dirac.

Sendo assim, substituindo as equações (4.125) e (4.126) em (4.118) e (4.119) no tempo $t = 0$, respectivamente, podemos encontramos $c_1(p_i)$ e $c_2(p_i)$:

$$c_1(p_i) = \frac{A_1(p_i)}{B_1(p_i)} \delta(p - p_i), \quad (4.127)$$

onde

$$A_1(p_i) = 2\sqrt{\delta} \left(\sqrt{\alpha^2 + \Gamma^2} + \Gamma \right) D_{-\eta} \left[\frac{(1-i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] \\ - (1-i) \left[2\gamma \left(\sqrt{\alpha^2 + \Gamma^2} + \Gamma \right) + \alpha \right] D_{-1-\eta} \left[\frac{(1-i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right], \quad (4.128)$$

$$B_1(p_i) = K \left\{ i\sqrt{\delta} D_{1+\eta} \left[-\frac{(1+i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] D_{-1-\eta} \left[\frac{(1-i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\delta} D_{\eta} \left[-\frac{(1+i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] D_{-\eta} \left[\frac{(1-i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] \right. \\ \left. - (1-i)\gamma D_{\eta} \left[-\frac{(1+i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] D_{-1-\eta} \left[\frac{(1-i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] \right\}, \quad (4.129)$$

$$K = 2\sqrt{2} \sqrt{\Gamma \left(\sqrt{\alpha^2 + \Gamma^2} + \Gamma \right) + \alpha^2} \quad (4.130)$$

$$c_2(p_i) = \frac{A_2(p_i)}{B_2(p_i)} \delta(p - p_i), \quad (4.131)$$

onde

$$A_2(p_i) = 2i\sqrt{\delta} \left(\sqrt{\alpha^2 + \Gamma^2} + \Gamma \right) D_{1+\eta} \left[-\frac{(1+i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] \\ + (1-i)\alpha D_{\eta} \left[-\frac{(1+i)\gamma}{\sqrt{\delta}} \right] \quad (4.132)$$

$$B_2(p_i) = B_1(p_i) \quad (4.133)$$

Com a solução do problema “em mãos”, podemos calcular a probabilidade do elétron permanecer no estado inicial

$$P_+(t) = |\langle \Psi'(0) | \Psi'(t) \rangle|^2. \quad (4.134)$$

Note que se substituirmos $|\Psi'(t)\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}} |\Psi(t)\rangle$ na expressão (4.134),

$$\begin{aligned} P_+(t) &= |\langle \Psi'(0) | \Psi'(t) \rangle|^2 = |\langle \Psi(0) | e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} |\Psi(t)\rangle|^2 \\ &= |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (4.135)$$

obtemos que a probabilidade é invariante pela rotação que fizemos no sistema.

O termo

$$\begin{aligned} \langle \Psi'(0) | \Psi'(t) \rangle &= \int \int dp dp' \left[\langle p', 0 | C_{0p'}^*(0, p') + \langle p', 1 | C_{1p'}^*(0, p') \right] \\ &\quad \times [C_{0p}(t, p) | 0, p \rangle + C_{1p}(t, p) | 1, p \rangle] \\ &= \int \int dp dp' \left[C_{0p'}^*(0, p') C_{0p}(t, p) + C_{1p'}^*(0, p') C_{1p}(t, p) \right] \delta(p' - p) \\ &= \int dp [C_{0p}^*(0, p) C_{0p}(t, p) + C_{1p}^*(0, p) C_{1p}(t, p)] \end{aligned} \quad (4.136)$$

Substituindo as condições iniciais (4.125) e (4.126) na expressão (4.136), obtemos

$$\langle \Psi'(0) | \Psi'(t) \rangle = \int dp [N_i^*(E_i + \Gamma)^* C_{0p}(p, t) + (N_i \alpha)^* C_{1p}(p, t)] \delta(p - p_i) \quad (4.137)$$

$$\implies \langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle = N_i(E_i + \Gamma) C_{0p}(p_i, t) + N_i \alpha C_{1p}(p_i, t) \quad (4.138)$$

Consequentemente,

$$|\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2 = |C_{0p}^*(p_i, 0) C_{0p}(p_i, t) + C_{1p}^*(p_i, 0) C_{1p}(p_i, t)|^2. \quad (4.139)$$

Para verificar a validade da condição adiabática sobre o campo elétrico (4.47), avaliamos através do software Mathematica a probabilidade do sistema permanecer no estado inicial (4.134) para três valores de campo elétrico, $E_{01} = 10^{18}$ V/m, $E_{02} = 10^{17}$ V/m e $E_{03} = 10^{16}$ V/m. A variação do campo elétrico corresponde à variação do parâmetro κ na equação (4.117). Note que E_{03} é mil vezes menos intenso que o campo na condição adiabática.

Numericamente, temos que $\gamma = 0,99$ e

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 7,5 \rightarrow E_0 = 10^{19} \text{ V/m}; & \kappa_2 &= 0,075 \rightarrow E_{02} = 10^{17} \text{ V/m}; \\ \kappa_1 &= 0,75 \rightarrow E_{01} = 10^{18} \text{ V/m}; & \kappa_3 &= 0,0075 \rightarrow E_{03} = 10^{16} \text{ V/m}; \end{aligned}$$

O gráfico da figura 13 apresenta a probabilidade do elétron permanecer no estado inicial de maior energia durante a evolução. Para a primeira

análise supomos que o campo elétrico não obedece a condição adiabática e escolhemos o valor $E_0 = 10^{19}$ V/m.

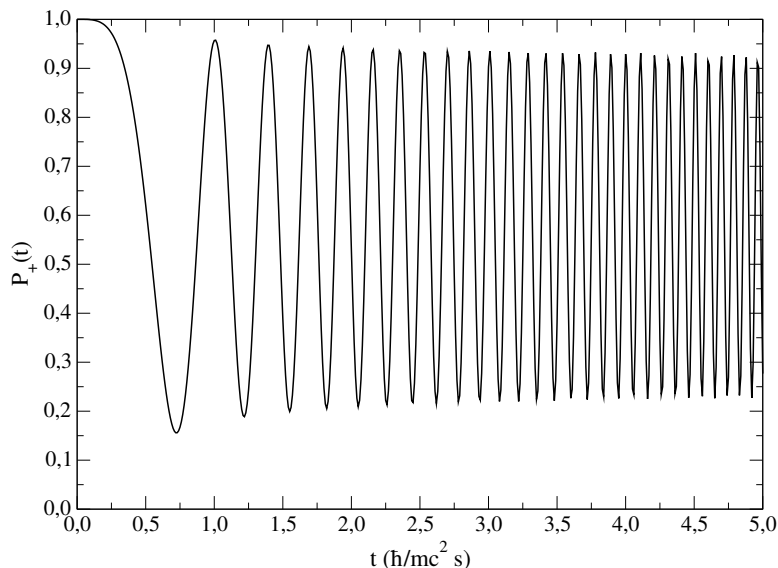


Figura 13: Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{19}$ V/m.

Note que a probabilidade do elétron permanecer no estado inicial oscila com uma frequência alta que aumenta com o passar do tempo. Como previsto, ao aplicarmos um campo com esta magnitude não garantimos a adiabaticidade do sistema.

O gráfico da figura 14 apresenta o comportamento da probabilidade de transição $P_+(t)$ para os valores de campo menores que E_0 . Como esperado, o gráfico mostra que a medida que o valor do campo diminui em relação a $E_0 = 1 \times 10^{19}$ V/m, a probabilidade do elétron permanecer no estado de maior energia se aproxima de 1, ou seja, o regime torna-se cada vez mais adiabático.

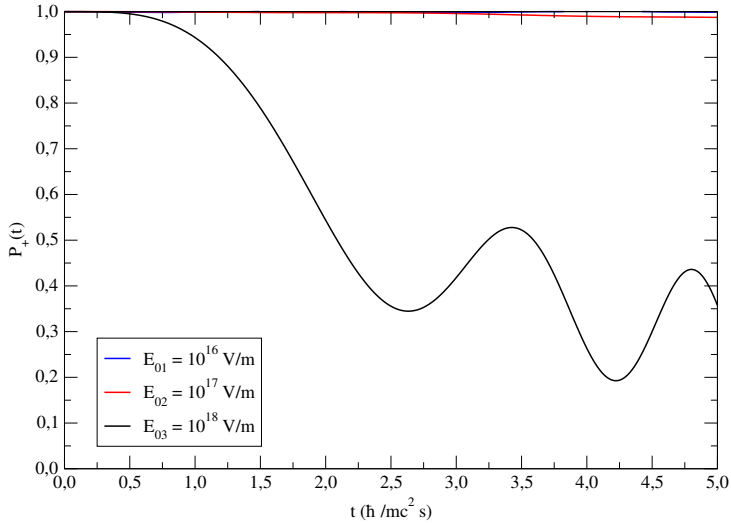


Figura 14: Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para três valores distintos de campo elétrico. A medida que o campo diminui sua magnitude, a adiabaticidade do sistema prevalece.

4.2.2 Solução Numérica

Nesta seção apresentaremos a solução numérica para o problema. Com o auxílio de um programa em *Fortran*, que utiliza o método de Runge-Kutta de ordem 4 e passo adaptativo, disponibilizado e implementado pelo professor Kahio T. Mazon, do departamento de física da UFSC, resolvemos aproximadamente nosso sistema de equações e encontramos resultados que corroboram com os resultados obtidos analiticamente.

Começamos a nossa solução, ramificando as duas equações acopladas obtidas para os coeficientes em quatro novas equações acopladas, duas reais e duas imaginárias. Para isto, primeiramente escrevemos os coeficientes C_{0p} e C_{1p} explicitamente como variáveis complexas:

$$C_{0p} = x_0 + iy_0, \quad \dot{C}_{0p} = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0, \quad (4.140)$$

$$C_{1p} = x_1 + iy_1, \quad \dot{C}_{1p} = \dot{x}_1 + i\dot{y}_1. \quad (4.141)$$

Substituindo os resultados acima nas equações (4.112a) e (4.112b), obtemos as seguintes equações

Parte Real	
$\dot{x}_0 = (\mu - vt)y_0 + \rho y_1$	(4.142a)
$\dot{x}_1 = -(\mu - vt)y_1 + \rho y_0$	(4.142b)
Parte Imaginária	
$\dot{y}_0 = -(\mu - vt)x_0 - \rho x_1$	(4.142c)
$\dot{y}_1 = (\mu - vt)x_1 - \rho x_0$	(4.142d)

As equações diferenciais acima apresentam as constantes μ , v e ρ que possuem valores numéricos com uma ordem de grandeza muito grande no sistema internacional de unidades, da ordem de (10^{21}) . Para facilitar as contas numéricas reescreveremos as equações acima de uma maneira mais conveniente e que esteja de acordo com a forma que procedemos para obter a solução analítica.

Dividindo as equações acima por ρ e lembrando que $t' = \rho t$, $\gamma = \frac{\mu}{\rho}$ e $\kappa = \frac{v}{\rho^2}$, ficamos com as seguintes equações diferenciais a serem resolvidas

$$\frac{dx_0}{dt'} = (\gamma - \kappa t')y_0 + y_1, \quad (4.143a)$$

$$\frac{dx_1}{dt'} = -(\gamma - \kappa t')y_1 + y_0, \quad (4.143b)$$

$$\frac{dy_0}{dt'} = -(\gamma - \kappa t')x_0 - x_1, \quad (4.143c)$$

$$\frac{dy_1}{dt'} = (\gamma - \kappa t')x_1 - x_0. \quad (4.143d)$$

A variação do campo elétrico novamente corresponde à variação do parâmetro κ nas equações acima. O programa implementado é capaz de resolver o conjunto de soluções diferenciais acopladas e fornece como resposta a probabilidade do elétron permanecer no estado inicial.

O gráfico da figura 15 mostra esta probabilidade para o regime não adiabático. Ao invés de considerarmos apenas o gráfico obtido numericamente, como motivo de comparação dos resultados, apresentamos também a curva analítica obtida na seção 4.2.1. Como esperado, a curva obtida numericamente (curva pontilhada em vermelho) para a probabilidade reproduz exatamente a curva analítica (curva sólida em preto), indicando que a adiabaticidade do sistema não está garantida quando aplicamos este valor de campo elétrico.

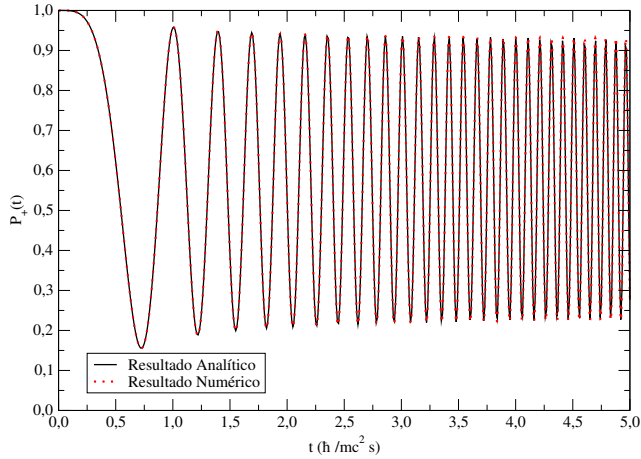


Figura 15: Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{19}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.

O mesmo foi feito para os valores de campo elétrico E_{01} , E_{02} e E_{03} e estão apresentados nos gráficos das figuras 16, 17 e 18, respectivamente.

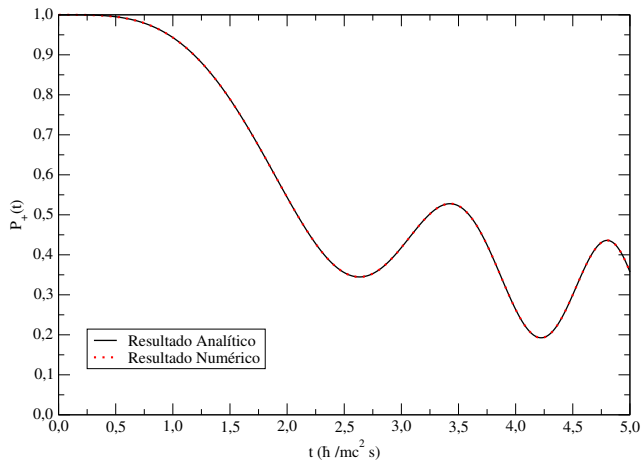


Figura 16: Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{18}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.

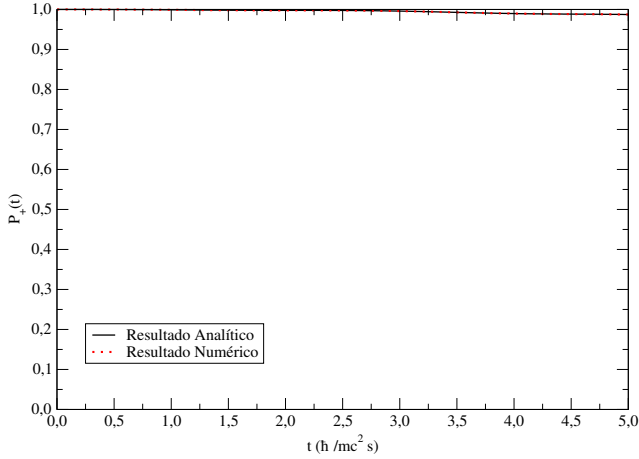


Figura 17: Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{17}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.

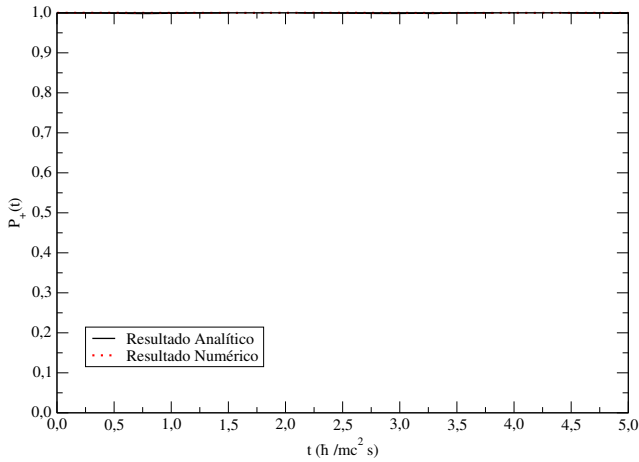


Figura 18: Probabilidade do elétron permanecer no estado inicial para $E_0 = 10^{16}$ V/m. A curva sólida em preto indica o resultado analítico e a curva pontilhada em vermelho indica o resultado numérico.

Uma outra maneira de analisar a adiabaticidade do sistema é calcular a probabilidade do elétron permanecer no estado adiabático (estado obtido para um campo elétrico que obedece a condição (4.47)). Escolhemos como valor de campo $E_{02} = 10^{17}$ V/m (que corresponde a $\kappa = 0,075$ nas equações diferenciais resolvidas). Os gráficos das figuras 19 e 20 apresentam o comportamento dos coeficientes $C_{0p}^{(Ad)}(p_i, t)$ e $C_{1p}^{(Ad)}(p_i, t)$ neste regime.

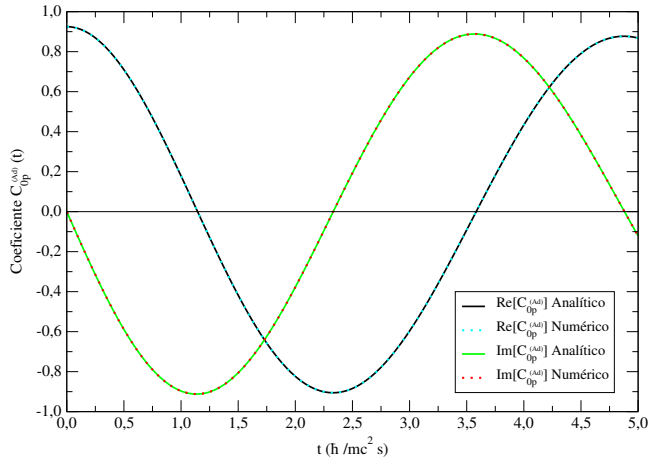


Figura 19: Comportamento do coeficiente C_{0p} no regime adiabático.

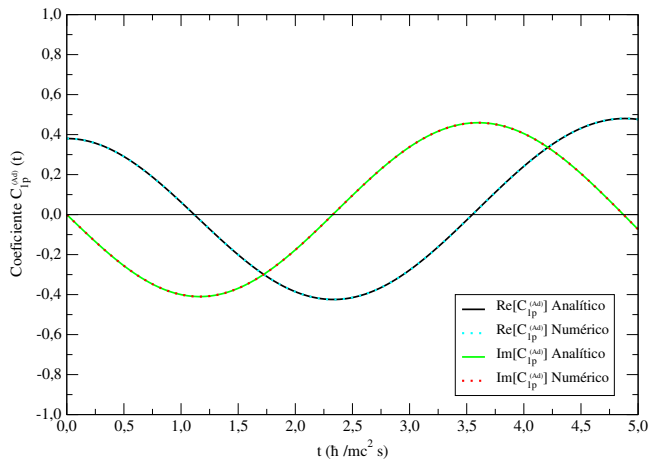


Figura 20: Comportamento do coeficiente C_{1p} no regime adiabático.

Observe nos gráficos 19 e 20 que nos dois métodos de resolução, analítico e numérico, as soluções obtidas para os coeficientes no regime adiabático são idênticas.

A probabilidade do elétron permanecer no autoestado $|\Psi_{\text{Ad}}(t)\rangle$ durante a evolução deve ser calculada da seguinte forma

$$P_{\text{Ad}}(t) = |\langle \Psi_{\text{Ad}}(t) | \Psi(t) \rangle|^2 = |C_{0p}^{*(\text{Ad})}(p_i, t)C_{0p}(p_i, t) + C_{1p}^{*(\text{Ad})}(p_i, t)C_{1p}(p_i, t)|^2. \quad (4.144)$$

O gráfico da figura 21 apresenta o comportamento da probabilidade $\Psi_{\text{Ad}}(t)$ a medida que aproximamos o campo elétrico do valor escolhido para calcular $\Psi_{\text{Ad}}(t)$.

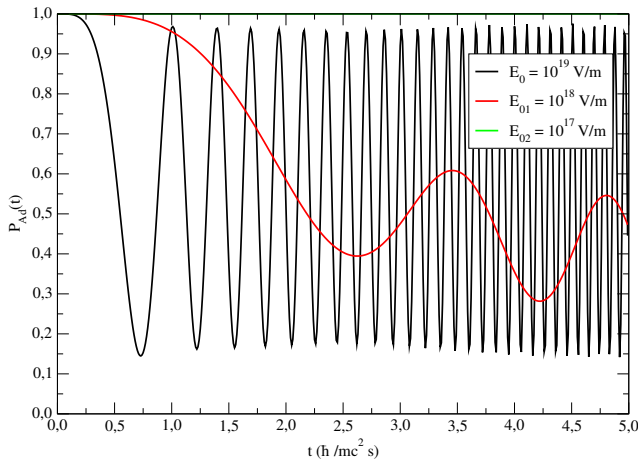


Figura 21: Probabilidade do elétron permanecer no autoestado $|\Psi_{\text{Ad}}(t)\rangle$ para diferentes valores de campo elétrico aplicado.

Quando o estado do sistema se torna adiabático, $|\Psi(t)\rangle \rightarrow |\Psi_{\text{Ad}}\rangle$, a probabilidade de ocorrer transição para outro nível de energia torna-se muito pequena para qualquer tempo, confirmando a validade da condição adiabática calculada (4.47).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação implementamos o algoritmo de Deutsch adiabático considerando efeitos da relatividade restrita. Vimos que na computação quântica adiabática a sequência de operações lógicas unitárias é substituída por um hamiltoniano que depende continuamente do tempo, cujo autoestado contém a solução do problema. Para considerar a relatividade no problema de interesse, substituímos o hamiltoniano de Schrödinger pelo hamiltoniano de Dirac, encontrando que o tempo de computação no caso relativístico é

$$T_R \gtrsim 10^{-20} \text{ s},$$

enquanto que na sua versão análoga não-relativística é

$$T_{NR} \gg 17,0 \text{ ps}.$$

O resultado obtido para os tempos de computação em ambos os regimes, levou a conclusão de que o valor do tempo de computação para o caso não-relativístico do sistema é 10^{11} vezes maior do que no caso relativístico. Apesar de muito mais rápido que sua contrapartida não-relativística, a nossa proposta forneceu um algoritmo probabilístico. Mesmo sendo probabilístico, poderíamos nos perguntar quantas vezes seria necessário rodar o algoritmo relativístico para obter uma solução com segurança em um intervalo de tempo menor ou igual aquele necessário para rodar o algoritmo determinístico não relativístico. Comparando-o com o algoritmo de Deutsch implementado via computação quântica adiabática na referência [49], cuja resposta é obtida em apenas uma medida, este possui pior desempenho. Acreditamos que podemos tornar o nosso algoritmo determinístico mudando o tipo de interpolação, ao invés de linear usaremos uma senoidal. A justificativa para termos tempos de computação tão curtos se deve a presença do termo $mc^2\sigma_z$ no hamiltoniano de Dirac. Como o tempo de computação é inversamente proporcional ao *gap* de energia, que nesse caso o valor mínimo é $2mc^2$, entendemos a razão deste tempo ser tão pequeno. Este pode ser um indício de que devemos explorar mais os sistemas quânticos relativísticos para a realização da computação quântica adiabática, apesar da dificuldade de controle quando comparados a plataformas já bem estabelecidas, como íons aprisionados, eletrodinâmica quântica de cavidades, redes óticas, etc.

Salientamos que o limite não-relativístico obtido a partir da transformação de Foldy-Wouthuysen sobre o hamiltoniano de Dirac não forneceu um resultado útil, os autoestados instantâneos do hamiltoniano não-relativístico são estados constantes no tempo. Concluimos que este método leva à um

sistema que não evolui e, conseqüentemente, não podemos implementar um algoritmo para compará-lo com o caso relativístico. A alternativa foi implementar o algoritmo com o hamiltoniano de Landau-Zener-Stückelberg (LZS) como o análogo não-relativístico do hamiltoniano de Dirac.

A condição adiabática também foi analisada do ponto de vista do parâmetro externo ao sistema que temos controle, que em nosso caso é o potencial vetor. O cálculo da condição para $A(s)$, nos levou a concluir que se o campo elétrico aplicado obedece $E_0 \ll 10^{18}$ V/m, a adiabaticidade é garantida e o algoritmo funciona.

Com a finalidade de verificar a validade da condição adiabática, encontramos a solução geral da equação de Dirac para o hamiltoniano (4.18), analiticamente e numericamente. Mostramos a equivalência entre as soluções analítica e numérica e confirmamos a validade da condição adiabática sobre o campo elétrico aplicado.

Como perspectivas, esperamos encontrar mecanismos para tornar o nosso algoritmo de Deutsch determinístico. Mudar a interpolação será o primeiro caminho a seguir. Outra busca interessante consiste em encontrar um sistema físico onde possamos mapear a equação de Dirac para implementar o referido algoritmo. Alguns sistemas da matéria condensada tem se mostrado atraente para a aplicação da equação de Dirac na dinâmica do sistema, tal como o grafeno e os férmions de Majorana, por exemplo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] POPLAVSKII, R. P. *The thermodynamical models of information process.* Adv. Phys. Sci. **115**, 465, (1975).
- [2] FEYNMAN, R. *Simulating physics with computers.* Int. J. Theor. Phys. **21**, 6 (1982).
- [3] NIELSEN, M. A. and CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information.* Bookman, (2000).
- [4] MOORE, G. E. *Cramming more components onto integrated circuits.* (1965).
- [5] BENIOFF P. *Quantum mechanical Hamiltonian models of Turing machine.* J. Stat. Phys. **29**, 515 (1982).
- [6] BENIOFF P. *Quantum mechanical models of Turing machines that dissipate no energy.* Phys. Rev. Lett. **48**, 1581 (1982).
- [7] DEUTSCH, D. *The Church-Turing principle and the universal quantum computer.* Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- [8] DEUTSCH, D. *Quantum computational networks.* Proc. R. Soc. Lond. A **425**, 73 (1989).
- [9] DEUTSCH, D. and JOZSA. *Rapid solution of problems by quantum computation.* Proc. R. Soc. Lond. A **439**, 553 (1992).
- [10] SHOR, P.W. *Proc. 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science.* IEEE Computer Society Press, 121 (1994).
- [11] GROVER, L.K. *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack.* Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [12] FARHI, E. et al. *Quantum computation by adiabatic evolution.* arXiv:quant-ph/0001106 (2000).
- [13] VAN DAM, W., MOSCA, M. and VAZIRANI, U. *How powerful is adiabatic quantum computation.* IEEE Computer Society. 279 (2001).
- [14] AHARONOV, D. et al. *Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation.* SIAM Journal of Computing **37**, 166 (2007).

- [15] <http://www.dwavesys.com/press-releases/d-wave-systems-previews-2000-qubit-quantum-system>.
- [16] CIOCIRLAN D., TAPUS, N. and DRAGOMIR, D. *Solving hard problems on adiabatic quantum computers*. IEEE Computer Society - 20th Int. Conf. on Control Systems and Science, 215 (2015).
- [17] JOHNSON, M. et al. *Quantum annealing with manufactured spins*. Nature **473**, 194 (2011).
- [18] GARCÍA-ESCARTÍN, J. C. and CHAMORRO-POSADA, P. *The Grover energy transfer algorithm for relativistic speeds*. J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 455301 (2010).
- [19] CHILDS, A. M. and GOLDSTONE, J. *Spatial search and the Dirac equation*. Phys. Rev. A **70**, 042312 (2004).
- [20] STRARCH, F. W. *Relativistic quantum walks*. Phys. Rev. A **73**, 054302 (2006).
- [21] STRARCH, F. W. *Relativistic effects and rigorous limits for discrete- and continuous-time quantum walks*. J. Math. Phys. **48**, 082102 (2007).
- [22] MALLICK, A. and CHANDRASHEKAR, C.M. *Dirac cellular automaton from split-step quantum walk*. Sci. Rep. 25779 (2016).
- [23] D'ARIANO, G. M. et al. *Discrete time dirac quantum walk in 3+1 dimensions*. Entropy **18**, 228 (2016).
- [24] RANKINE, W. J. *A manual of applied mechanics*. London and Glasgow, (1859).
- [25] CARNOT, S. *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. Bachelier, (1824).
- [26] EHRENFEST, P. Ann. Phys **36**, 91 (1911).
- [27] EHRENFEST, P. Proc. Amsteden Acad **16**, 591 (1913).
- [28] EHRENFEST, P. Versl. Akad Wet. Amsteden **25**, 412 (1916).
- [29] BORN, M. and FOCK, V. Z. Phys. **51**, 165 (1928).
- [30] BERRY, M. V. *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*. Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).

- [31] SIMON, B. *Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's phase*. Phys. Rev. Lett. **51**, 2167 (1983).
- [32] SHAPER, A. and WILEZEK, F. *Geometric phases in physics*. Wor. Sci. Pub., (1989).
- [33] AHARONOV, Y. and ANANDAN, J. *Phase change during a cyclic quantum evolution*. Phys. Rev. Lett. **58**, 16 (1987).
- [34] FARHI, E. and GUTMANN, S. *An analog analogue of a digital quantum computation*. arXiv:quant-ph/9612026 (1996).
- [35] FARHI, E., GOLDSTONE, J. and GUTMANN. *A numerical study of the performance of a quantum adiabatic evolution algorithm for satisfiability*. arXiv:quant-ph/0007071 (2000).
- [36] CHILDS, A. M. et al. *Finding cliques by quantum adiabatic evolution*. arXiv:quant-ph/0012104 (2000).
- [37] FARHI, E. et al. *A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem*. D. Preda. Sci. **292**, 472 (2001).
- [38] CHILDS, A. M., FARHI, E. and PRESKILL, J. *Robustness of adiabatic quantum computation*. Phys. Rev. A **65**, 012322 (2001).
- [39] SARANDY, M. S., Sarandy, WU, L. A. and LIDAR, D. A. O. *Consistency of the adiabatic theorem*. Quant. Inf. Prec. **3**, 331 (2004).
- [40] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd ed., Prentice-Hall (2005).
- [41] MESSIAH, A. *Messiah. Quantum Mechanics*. v. 2, John Wiley & Sons (1961).
- [42] TURING, A. M. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proc. Lond. Math. Soc. 2 **42**, 230 (1936).
- [43] HU, W. and WU, B. *Optimizing the quantum adiabatic algorithm*. Physical Review A **93**, 012345 (2016).
- [44] ROLAND, J. and CERF, N. J. *Quantum search by local adiabatic evolution*. Phys. Rev. A **65** 042308 (2002).
- [45] PENG, X. et al. *Quantum adiabatic algorithm for factorization and its experimental implementation*. Phy. Rev. Letters **101** 220405 (2008).

- [46] SUN, J. et al. *Quant. Inf. Proc.* **13** 731 (2013).
- [47] SUN, J. et al. *Adiabatically implementing quantum gates.* *J. Appl. Phys.* **115** 224901 (2014).
- [48] COLLINS, D., KIM, K.W. and HOLTON, W.C. *Deutsch-Jozsa algorithm as a test of quantum computation.* *Phys. Rev. A* **58**,R1633 (1998).
- [49] DAS, S., KOBES, R. and KUNSTATTER, G. *Adiabatic quantum computation and Deutsch's algorithm.* *Phys. Rev. A* **65**, 062310 (2002).
- [50] BRANSDEN, B. H. and JOACHAIN, C. J. *Quantum Mechanics.*, 2nd Ed., Pearson Education Limited (2000).
- [51] BJORKEN, J. D. and DRELL S. D. *Relativistic Quantum Mechanics.*, McGraw-Hill (1964).
- [52] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles.*, 2nd Ed., Wiley-VCH (2008).
- [53] DIRAC, P. A. M. *The quantum theory of the electron.* *Roy. Soc. Proc. A*, 610 (1928).
- [54] DIRAC, P. A. M. *A theory of electrons and protons.* *Roy. Soc. Proc. A*, 360 (1929).
- [55] STEANE, A. M. *An introduction to spinors.* arXiv:1312.3824 (2013).
- [56] LLOYD, S. *Ultimate physical limits to computation.* *Nature* **406**, 1047 (2000).
- [57] ECKERT, A., BOUWMEESTER, D. and ZEILINGER, A. *The Physics of Quantum Information.* Springer (2001).
- [58] ZHANG, D., YU, X. and TONG, D. M. *Theorem on the existence of a nonzero energy gap in adiabatic quantum computation.* *Phys. Rev. A* **90**, 042321 (2014).
- [59] FILLION-GOURDEAU, F., LORIN, E. and BANDRAUK, A. D. *Landau-Zener-Stückelberg interferometry in pair production from counterpropagating lasers.* *Phys. Rev. A* **86**, 032118 (2012).
- [60] FOLDY, L. and WOUTHUYSEN, S. A. *On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit.* *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [61] ITZYKSON, C. and ZUBER, J. B. *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill Inc. (1980).

- [62] COHEN, C. and TANNODJI, B. D. *Quantum mechanics*. Wiley (1991).
- [63] SHEVCHENKO, S. N., ASHHAB, S. and NORI, F. *Landau-Zener-Stückelberg interferometry*. Phys. Rep. **492**, 1 (2010).
- [64] LANDAU, L. D. *Zur theorie der energieübertragung II*. Phys. Sov. Uni. **2**, 46 (1932).
- [65] ZENER, C. *Non-adiabatic crossing of energy levels*. Proc. R. Soc. A **137**, 696 (1932).
- [66] STÜCKELBERG, E. C. G. Hel. Phys. Acta **5**, 369 (1932).
- [67] RABI, I. I. *Space quantization in a gyrating magnetic field*. Phys. Rev. **51**, 652 (1937).
- [68] COFFEY, J. et al. *Collision Spectroscopy. II. Inelastic Scattering of He^+ by Ne*. Phys. Rev. **187**, 201 (1969).
- [69] CHILD, M. S. *Molecular collision theory*. J. Chem. Phys. **55**, 4344 (1974).
- [70] NIKITIN, E. E. and UMANSKI, S. Umanski. *Theory of slow atomic collision*. Springer, Berlin (1984).
- [71] DELONE, N. B. and KRAINOV, V. P. *Atoms in strong light fields* Springer Series in Chemical Physics **5** (1985).
- [72] ANKERHOLD, J. Ankerhold and GRABERT, H. *Enhancement of macroscopic quantum tunneling by Landau-Zener transitions*. Phys. Rev. Lett. **91**, 016803 (2003).
- [73] ITHIER, G. et al. Phys. Rev. Lett. **94** 057004 (2005).
- [74] SAITO, K. and KAYANUMA, Y. *Nonadiabatic electron manipulation in quantum dot arrays*. Phys. Rev. B **70**, 201304(R) (2004).
- [75] SPREEU, W. et al. Phys. Rev. Lett. **65**, 3642 (1990).
- [76] SHYTOV, A. V., IVANOV, D. A. and FEIGEL'MAN *Landau-Zener interferometry for qubits*. Eur. Phys. J. B **36**, 263 (2003).
- [77] IZMALKOV, A. et al. *Consistency of ground state and spectroscopic measurements on flux qubits*. Phys. Rev. Lett. **101**, 017003 (2008).
- [78] MIYASHITA, S. J. Phys. Soc. Japan **64**, 3207 (1995)

- [79] ASHHAB, S., JOHANSSON, J. R. and NORI, F. *Decoherence in a scalable adiabatic quantum computer*. Phys. Rev. A **74**, 052330 (2006).
- [80] OLIVER, W. D. et al. *Mach-Zehnder interferometry in a strongly driven superconducting qubit*. Science **310**, 1653 (2005).
- [81] SILLANPÄÄ, M. *Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box*. Phys. Rev. Lett. **96**, 187002 (2006).
- [82] WILSON, C. M. et al. *Coherence times of dressed states of a superconducting qubit under extreme driving*. Phys. Rev. Lett. **98**, 257003 (2007).